Mathématiques niveau avancé - Corrigés

Enoncé : http://www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/a4-bac/bacplus2003.php

Corrigé de la question 1

1 a) Etude de fonction

$$f(x) = \left(1 - x^2\right) e^{-x}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$Z_f = \{-1, 1\}$$

Limites et asymptotes:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $y = 0$ est asymptote horizontale simple de f du côté de $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1 - x^2}{x} e^{-x} = \infty$; f n'a pas d'asymptote oblique

Variations

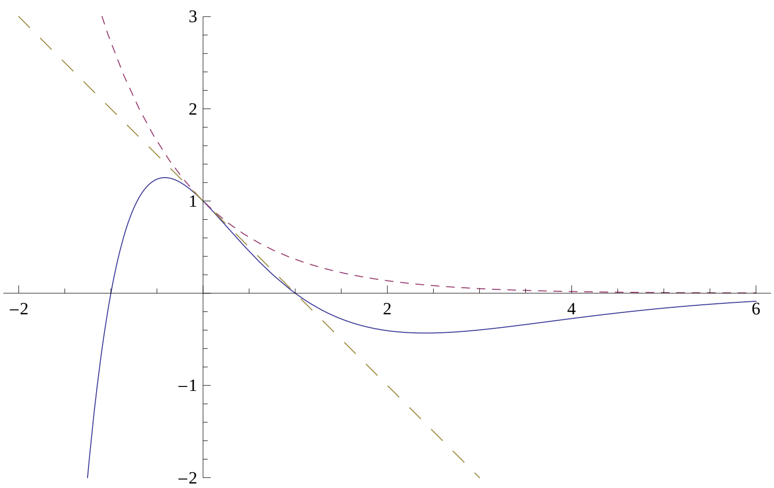
$f'(x) = -2 x e^{-x} + \left(1 - x^2\right) e^{-x} (-1) = e^{-x} \left(x^2 - 2 x - 1\right)$

$Z_{f'} = \left\{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right\} \simeq \{-0.414214, 2.41421\}$

$f\left(1 - \sqrt{2}\right) \simeq 1.2536$

$f\left(1 + \sqrt{2}\right) \simeq -0.43184$

x	$-\infty$	-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$	∞
$Sign(f)$		0				0			
$Sign(f')$	+	+	+	0	−	−	−	0	+
$Var(f)$	$-\infty$ ↗	0	↗	1.2536	↘	0	↘	-0.43184	↗ 0



- **1 b) Tangentes**

Abscisse du point de tangence

$f(x) = g(x)$ et $f'(x) = g'(x)$

$(1 - x^2)\, e^{-x} = e^{-x}$ et $(x^2 - 2x - 1)\, e^{-x} = (-1)\, e^{-x}$

$-x^2\, e^{-x} = 0$ et $(x^2 - 2x)\, e^{-x} = 0$

$x = 0$ et $x(x - 2) = 0$

$x = 0$

Equation de la tangente commune

$y = g'(0)(x - 0) + g(0) = (-1)(x - 0) + 1 = -x + 1$

- **1 c) Aire**

$$\text{Aire} = \int_0^\infty (g(x) - f(x))\, dx = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^2 e^{-x}\, dx =$$

$$\lim_{b\to\infty}\left(x^2 (-1)\, e^{-x}\,\big|_0^b - \int_0^b 2x(-1)\, e^{-x}\, dx\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-b^2 e^{-b} + 2\int_0^b x\, e^{-x}\, dx\right) =$$

$$\lim_{b\to\infty}\left(-b^2 e^{-b} + 2\left(x(-1)\, e^{-x}\,\big|_0^b - \int_0^b 1(-1)\, e^{-x}\, dx\right)\right) =$$

$$\lim_{b\to\infty}\left(-b^2 e^{-b} - 2b\, e^{-b} + 2\int_0^b e^{-x}\, dx\right) =$$

$$\lim_{b\to\infty}\left(-b^2 e^{-b} - 2b\, e^{-b} + 2(-1)\, e^{-x}\,\big|_0^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-b^2 e^{-b} - 2b\, e^{-b} - 2e^{-b} + 2\right) = 2$$

- **Corrigé de la question 2**

- **2 a) Aire du trapèze**

Equation de la tangente:

$$\cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y + c = 0$$

$$\cos\alpha\,(r\cos\alpha) + \sin\alpha\,(r\sin\alpha) + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = -r$$

$$\cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y - r = 0$$

Ordonnée de B:

$$\sin\alpha\, y - r = 0 \quad \Longrightarrow \quad B\left(0;\ \frac{r}{\sin\alpha}\right)$$

Ordonnée de A:

$$\cos\alpha\, r + \sin\alpha\, y - r = 0 \quad \Longrightarrow \quad A\left(r;\ \frac{r(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}\right)$$

Aire du trapèze

$$\text{Aire} = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\sin\alpha} + \frac{r(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}\right) r = \frac{r^2}{2}\, \frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

- **2 b) Etude de fonction**

$$f(\alpha) = \frac{r^2}{2}\, \frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \text{où } r \text{ est constant}$$

$$f'(\alpha) = \frac{r^2}{2}\, \frac{\sin\alpha\sin\alpha - (2-\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{r^2}{2}\, \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{r^2}{2}\, \frac{1 - 2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$f'(\alpha) = 0 \iff \cos\alpha = \frac{1}{2} \iff \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}\, r^2}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = r^2$$

$\lim_{\alpha \downarrow 0} f(\alpha) = \infty$ asymptote verticale $\alpha = 0$

α	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sign(f)	+	+	+
Sign(f')	−	0	+
Var(f)	∞ ↘	$\frac{\sqrt{3}\, r^2}{2}$	↗ r^2

Corrigé de la question 3

3 a) Aire du triangle

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 4 \\ -64 \end{pmatrix}$$

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{40^2 + 4^2 + 64^2} \simeq 37.7889$$

3 b) 1°) Médiane

M =point-milieu du segment BC

$$M\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{5}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 5 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$P(x, y, z) =$ point courant. Système d'équations paramétriques, de paramètre t

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM}\, t$$

$$x = -5 + \frac{9}{2} t$$

$$y = -5 + 5 t$$

$$z = 5 - \frac{5}{2} t$$

3 b) 2°) Hauteur

Première équation carésienne: équation du plan ABC:

$$\vec{n} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AP} = 0$$

$$-10\,(x + 5) + (y + 5) - 16\,(z - 5) = 0$$

$$-10x + y - 16z + 35 = 0$$

Deuxième équation carésienne: équation du plan perpendiculaire à BC qui passe par A:

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AP} = 0$$

$$11(x+5) - 2(y+5) - 7(z-5) = 0$$

$$11x - 2y - 7z + 80 = 0$$

Système

$$\begin{cases} -10x + y - 16z + 35 = 0 \\ 11x - 2y - 7z + 80 = 0 \end{cases}$$

- **3 c) Equations paramétriques de la bissectrice intérieure**

Equation de la droite BC

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC}\, s$$

$$x = -6 + 11s$$
$$y = 1 - 2s$$
$$z = 6 - 7s$$

Point courant $Q(x, y, z)$

$$\text{dist}(Q, \text{droite AB}) = \frac{\sqrt{(35+6x+y)^2 + (35+y-6z)^2 + (-x-z)^2}}{\sqrt{38}} = 2\sqrt{\frac{714}{19}}\sqrt{s^2}$$

$$\text{dist}(Q, \text{droite AC}) =$$

$$\frac{\sqrt{(-30+4x-10y)^2 + (-10-6y-4z)^2 + (-20+6x+10z)^2}}{2\sqrt{38}} = \sqrt{\frac{714}{19}}\sqrt{(-1+s)^2}$$

$$\text{dist}^2(Q, \text{droite AB}) - \text{dist}^2(Q, \text{droite AC}) = \frac{714}{19}\left(-1 + 2s + 3s^2\right) = 0$$

$$s = -1 \ (\text{bissectrice extérieure}) \quad \text{ou} \quad s = \frac{1}{3} \ (\text{bissectrice intérieure})$$

Point Q de la droite BC par lequel passe la bissectrice

$$Q\left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

Vecteur directeur de la bissectrice

$$\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{16}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AQ}\, r$$

$$x = -5 + 2r$$
$$y = -5 + 4r$$
$$z = 5 - r$$

▪ 3 c) Equations cartésiennes de la bissectrice intérieure

Première équation carésienne: équation du plan ABC (voir b) 2°))

$$-10x + y - 16z + 35 = 0$$

Deuxième équation cartésienne: plan bissecteur.
Choisir un point B_1 sur la droite AB et C_1 sur la droite AC à égale distance du point A:

$$\text{dist}(A, B) = \sqrt{38}$$

$$\text{dist}(A, C) = 2\sqrt{38}$$

$$B_1 = B(-6, 1, 6); \qquad C_1 = \text{milieu de AC} = (0, -3, 2)$$

Le plan bissecteur est le lieu géométrique des points équidistants de B_1 et C_1:

$$\text{dist}(P, B_1) = \text{dist}(P, C_1)$$

$$(x+6)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = (x)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2$$

$$12x - 8y - 8z + 60 = 0$$

$$3x - 2y - 2z + 15 = 0$$

Système

$$\begin{cases} -10x + y - 16z + 35 = 0 \\ 3x - 2y - 2z + 15 = 0 \end{cases}$$

▪ Corrigé de la question 4

▪ 4 a) 1°, 2° 3°

$$p\{10 \text{ oiseaux de la même espèce}\} = p\{10\,A\} + p\{10\,B\} + p\{10\,C\} = 0.3^{10} + 0.45^{10} + 0.25^{10} = 0.000347365$$

$$p\left\{10 \text{ oiseaux } \overline{A}\right\} = 0.7^{10} = 0.0282475$$

$$p\{\#A \geq 3\} = 1 - p\{\#A < 3\} = 1 - p\{\#A = 0\} - p\{\#A = 1\} - p\{\#A = 2\} = 1 - p\left\{10\,\overline{A}\right\} - p\left\{1\,A \text{ et } 9\,\overline{A}\right\} - p\left\{2\,A \text{ et } 8\,\overline{A}\right\} = 1 - 0.7^{10} - C_1^{10}\,0.3 \cdot 0.7^9 - C_2^{10}\,0.3^2 \cdot 0.7^8 = 1 - 0.7^{10} - 10 \cdot 0.3 \cdot 0.7^9 - 45 \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^8 = 0.617217$$

▪ 4 b) 1°

V = atteint par le virus; $\qquad \overline{V}$ = résiste au virus

$$p(C \mid V) = \frac{p(C \cap V)}{p(V)} = \frac{p(C \cap V)}{p(A \cap V) + p(B \cap V) + p(C \cap V)} = \frac{0.25 \times 0.4}{0.3 \cdot 0.7 + 0.45 \cdot 0.6 + 0.25 \cdot 0.4} = 0.172414$$

▪ 4 b) 2°

$$p\left(C \cap \overline{V}\right) = 0.25 \cdot 0.6 = 0.15; \qquad p\left(\overline{C \cap \overline{V}}\right) = 0.85;$$

$$p\left(\#\left(C \cap \overline{V}\right) \geq 1\right) = 1 - p\left(\#\left(C \cap \overline{V}\right) = 0\right) = 1 - p\left(\#\left(\overline{C \cap \overline{V}}\right) = n\right) = 1 - 0.85^n \geq 0.99$$

$$n \geq \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.85)} \simeq 28.3362 \qquad n \geq 29$$

Page mère : http://www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/