

■ Enoncés des exercices "a3-Dérivées I (renforcé): définition et règles de calcul"

[http : // www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/a3/a3-derivees_1.php](http://www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/a3/a3-derivees_1.php)

a3 - Dérivées I (renforcé): définition et règles de calcul

■ Corrigé de l'exercice 1

a) Vitesse moyenne sur l'intervalle $[0; t]$

$$\bar{v}_{[0; t]} = \frac{r(t) - r(0)}{t - 0} = \frac{36t - \frac{1}{3}t^3}{t} = 36 - \frac{1}{3}t^2$$

b) Vitesse à l'instant t

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{36(t+h) - \frac{1}{3}(t+h)^3 - 36t + \frac{1}{3}t^3}{h} =$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \times 6h - \frac{1}{3}(3t^2h + 3th^2 + h^3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(3 \times 6 - \frac{1}{3}(3t^2 + 3th + h^2) \right) = 36 - t^2$$

c) Instant de l'arrêt:

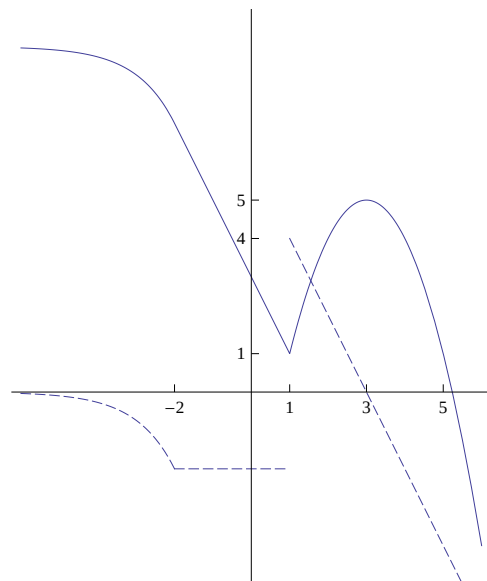
$$v(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (36 - t^2 = 0 \quad \text{et} \quad t \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad t = 6 \text{ [s]}$$

Distance de freinage

$$d = r(6) - r(0) = 36 \times 6 - \frac{1}{3} \times 6^3 - 0 = 144 \text{ [m]}$$

■ Corrigé de l'exercice 2

a)



b) La fonction f n'est pas dérivable en $x = 1$. On a

$$f'_g(1) \approx -2; \quad f'_d(1) \approx 4.$$

■ Corrigé de l'exercice 3

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(x+h - \frac{(x+h)^3}{3}\right) - \left(x - \frac{x^3}{3}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x+3h - (x+h)^3) - (3x - x^3)}{3h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x+3h - x^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3 - 3x + x^3}{3h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h - 3x^2h - 3xh^2 - h^3}{3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - 3x^2 - 3xh - h^2}{3} = \frac{3 - 3x^2}{3} = 1 - x^2
 \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 4

a)

$$\frac{V(3) - V(1)}{3 - 1} = \frac{\frac{75}{2} - 25}{2} = \frac{25}{4} = 6.25 \quad \left[\frac{\text{litre}}{\text{seconde}} \right]$$

b)

$$\begin{aligned}
 V'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 50 \frac{\frac{t+\Delta t}{t+\Delta t+1} - \frac{t}{t+1}}{\Delta t} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 50 \frac{\frac{(t+\Delta t)(t+1) - t(t+\Delta t+1)}{(t+\Delta t+1)(t+1)}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 50 \frac{t^2 + t + t \cdot \Delta t + \Delta t - t^2 - t \cdot \Delta t - t}{\Delta t (t + \Delta t + 1) (t + 1)} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 50 \frac{\Delta t}{\Delta t (t + \Delta t + 1) (t + 1)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 50 \frac{1}{(t + \Delta t + 1) (t + 1)} = \frac{50}{(t + 1)^2}
 \end{aligned}$$

$$V'(1) = \frac{50}{4} = 12.5 \quad \left[\frac{\text{litre}}{\text{seconde}} \right]$$

$$V'(3) = \frac{50}{16} = 3.125 \quad \left[\frac{\text{litre}}{\text{seconde}} \right]$$

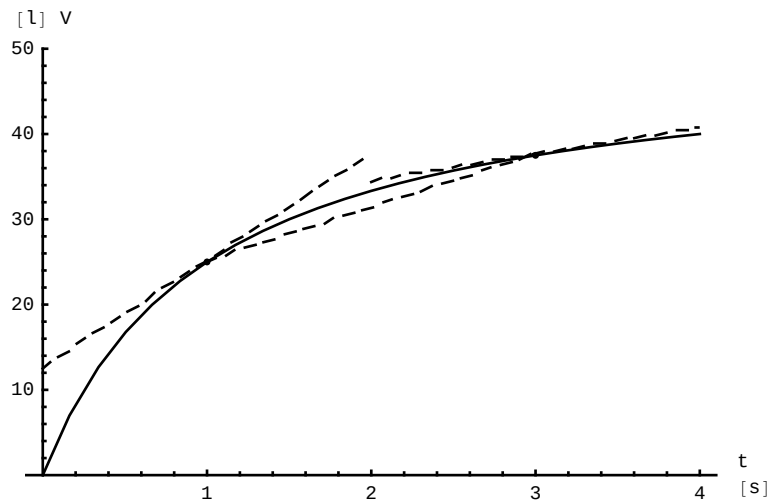
c)

Interprétation graphique:

$$\frac{V(3) - V(1)}{3 - 1} = \text{pente de la sécante entre les points } (1, V(1)) \text{ et } (3, V(3));$$

$$V'(1) = \text{pente de la tangente à } V \text{ en } 1;$$

$$V'(3) = \text{pente de la tangente à } V \text{ en } 3 \text{ (voir graphique).}$$



d)

$$V'(t) = 1$$

$$\frac{50}{(t+1)^2} = 1$$

$$50 = (t+1)^2$$

$$t+1 = \sqrt{50}$$

$$t = \sqrt{50} - 1 \approx 6.071 \quad [\text{seconde}]$$

e)

$$V(t) = 30$$

$$50 \frac{t}{t+1} = 30$$

$$50t = 30(t+1)$$

$$20t = 30$$

$$t = 1.5 \quad [\text{seconde}]$$

$$V'(1.5) = \frac{50}{(1.5+1)^2} = 8 \quad \left[\frac{\text{litre}}{\text{seconde}} \right]$$

■ Corrigé de l'exercice 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

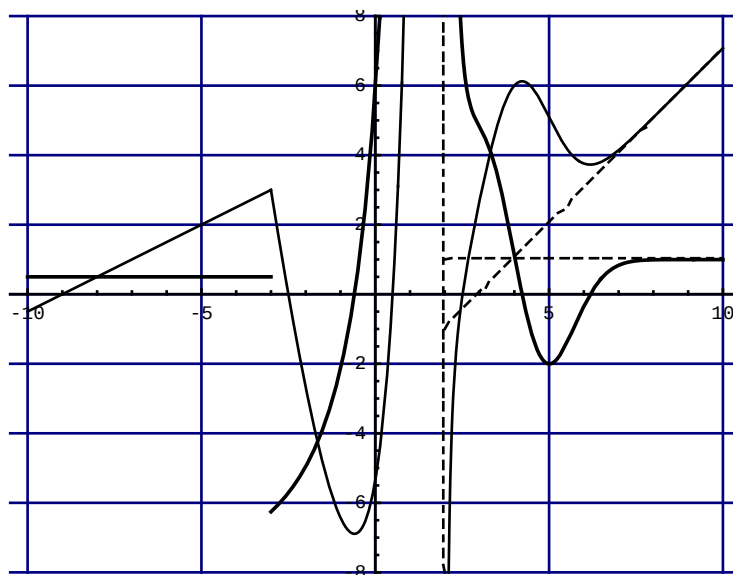
$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{x^3-125} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{(x-5)(x^2+5x+25)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-1}{x^2+5x+25} = \frac{-1}{25+25+25} = -\frac{1}{75}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3-125}{x+5} = \frac{5^3-125}{5+5} = \frac{0}{10} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+5}{25-x^2} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+5}{(5-x)(5+x)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{5-x} \quad \text{n'existe pas car}$$

$$\lim_{x \downarrow 5} \frac{1}{5-x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \uparrow 5} \frac{1}{5-x} = \infty$$

■ Corrigé de l'exercice 6



■ Lien vers la page mère: "Exercices corrigés"

[http : // www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/](http://www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/)