Calculer précisément cos (x) et sin (x)

pour des angles x exprimés en radians.
Idée de la mtéthode:

avec des transformations trigonométriques élémentaires, on se ramène à l'intervalle de référence $[-\pi/8,\ \pi/8]$;
sur cet intervalle, le cosinus et le sinus sont calculés au moyen de développements en série.

1 Par périodicité, on se ramène à l'intervalle]-π, π]

$$x_1 = x - k\,2\pi \quad \text{où } k \text{ est un entier tel que} \quad -\pi < x_1 \le \pi$$

2 Par symétrie centrale, on se ramène à l'intervalle]-π/2, π/2]

$$\text{si } x_1 > \frac{\pi}{2} \text{ alors } (x_2 = x_1 - \pi,\ \sin x_1 = -\sin x_2,\ \cos x_1 = -\cos x_2)$$

$$\text{si } x_1 < -\frac{\pi}{2} \text{ alors } (x_2 = x_1 + \pi,\ \sin x_1 = -\sin x_2,\ \cos x_1 = -\cos x_2)$$

$$-\frac{\pi}{2} < x_2 \le \frac{\pi}{2}$$

3 Par une rotation d'un quart de tour dans le sens direct ou rétrograde, on se ramène à l'intervalle [-π/4, π/4]

$$\text{si } x_2 > \frac{\pi}{4} \text{ alors } \left(x_3 = x_2 - \frac{\pi}{2},\ \sin x_2 = \cos x_3,\ \cos x_2 = -\sin x_3\right)$$

$$\text{si } x_2 < -\frac{\pi}{4} \text{ alors } \left(x_3 = x_2 + \frac{\pi}{2},\ \sin x_2 = -\cos x_3,\ \cos x_2 = \sin x_3\right)$$

$$\text{sinon } (x_3 = x_2,\ \sin x_2 = \sin x_3,\ \cos x_2 = \cos x_3)$$

$$-\frac{\pi}{4} \le x_3 \le \frac{\pi}{4}$$

4 Par parité (symétrie d'axe horizontal), on se ramène à l'intervalle [0, π/4]

$$\text{si } x_3 < 0 \text{ alors } (x_4 = -x_3,\ \sin x_3 = -\sin x_4,\ \cos x_3 = \cos x_4)$$
$$\text{sinon } (x_4 = x_3,\ \sin x_3 = \sin x_4,\ \cos x_3 = \cos x_4)$$

$$0 \le x_4 \le \frac{\pi}{4}$$

5 Par une rotation d'angle -π/8, on se ramène à l'intervalle [-π/8, π/8]

$$h = x_4 - \frac{\pi}{8}$$

$$\cos(x_4) = \cos(h + \pi/8) = \cos(h)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin(h)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\sin(x_4) = \sin(h + \pi/8) = \sin(h)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos(h)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

4 Développements en série

On utilise maintenant les développements en série bien connus

$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!} + \frac{h^8}{8!} - \frac{h^{10}}{10!} + \frac{h^{12}}{12!} - \ldots$$

$$\sin(h) = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \frac{h^7}{7!} + \frac{h^9}{9!} - \frac{h^{11}}{11!} + \ldots$$

5 Algorithme

Représentation interne: (α désigne la valeur courante de l'angle x après les transformations trigonométriques):

x = angle en radians;
ndecim = nombre de décimales (précision du calcul);
(cc, cs) coefficients de la représentation $\cos x = cc*\cos(\alpha) + cs*\sin(\alpha)$
(sc, ss) coefficients de la représentation $\sin x = sc*\cos(\alpha) + ss*\sin(\alpha)$
ch, sh désignent les développements en série de cos(h), sin(h)
c8 = cos(π/8); s8 = sin(π/8);

```
input (x, ndecim)
pix2=6.28318530717958647692528676655900058;
pi=3.14159265358979323846264338327950 29;
pid2=1.57079632679489661923132169163975 14;
pid4=0.78539816339744830961566084581987572;
pid8=0.39269908169872415480783042290993786;
c8=0.92387953251128675612818318939678829;
s8=0.38268343236508977172845998403039887;
eps = 1.E-ndecim;
cc=1; cs=0;
sc=0; ss=1;
Tant que x > pi
    x = x - pix2;
Tant que x <= -pi
    x = x + pix2;
Si x > pid2
    x=x-pi;
    cc=-cc; ss=-ss;
sinon si x < -pid2
    x=x+pi;
    cc=-cc; ss=-ss;
Si x > pid4
    x= x-pid2;
    cs=-cc; cc=0;
    sc=ss; ss=0;
sinon si x < -pid4
    x= x+pid2;
    cs=cc; cc=0;
    sc=-ss; ss=0;
h=x-pid8;
ch=1; d=1; n=0; h2=h*h; hn=1;
répète
    n=n+2; hn=hn*h2; d=d*(n-1)*n; ch=ch - hn/d;
    n=n+2; hn=hn*h2; d=d*(n-1)*n; t = hn/d; ch=ch + t;
jusqu'à ce que abs(t) < eps;
sh=h; d=1; n=1; hn=h;
répète
    n=n+2; hn=hn*h2; d=d(n-1)*n; sh=sh - hn/d;
```

```
    n=n+2; hn=hn*h2; d=d(n-1)*n; t=hn/d; sh=sh + t;
jusqu'à ce que abs(t) < eps;
cosx= (cc * ch + cs * sh) * c8 - (sc * ch + ss * sh) * s8;
sinx= (sc * ch + ss * sh) * c8 + (cc * ch + cs * sh) * s8;
```

Lien hypertexte vers la page mère

http://www.deleze.name/marcel/sec2/cossin/index.html