Marcel Délèze
Edition 2017

§ 1-3 Graphique d'une relation

Relation et fonctions

L'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

définit une relation qui n'est pas une fonction

$$(x, y) \mapsto z$$

En effet, à certaines valeurs de (x, y) correspondent plusieurs valeurs de z

```
Solve[x^2 + y^2 - z^2 - 1 == 0 /. {x → 1, y → 1}, z]
```
résous

```
{{z → -1}, {z → 1}}
```

En résolvant l'équation en z, on obtient deux expressions qui correspondent à deux fonctions

$$z^2 = x^2 + y^2 - 1$$

$$z = f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \quad \text{ou} \quad z = f_2(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

D'une manière plus générale, une équation **implicite** (c'est-à-dire **non résolue en z**)

$$g(x, y, z) = 0$$

définit une **relation** dans $\mathbb{R}^3$ tandis qu'une équation **explicite** (autrement dit **résolue en z**)

$$z = f(x, y)$$

définit une **fonction** $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dont le graphe est dans $\mathbb{R}^3$.

Ensemble de définition d'une fonction

On peut calculer l' image de (x, y) par f_1 ou par f_2 à la condition que

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0$$

Il s'ensuit que l'ensemble de définition des deux fonctions est

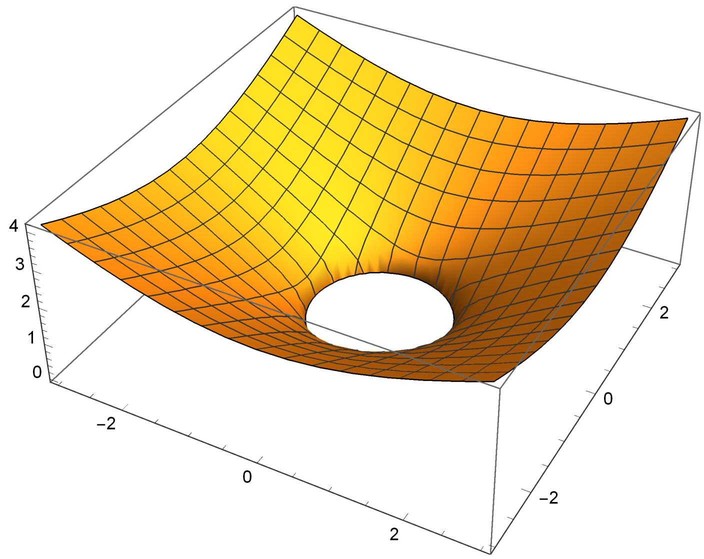
$$D_{f_1} = D_{f_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$$
$$= \text{complément du disque ouvert de centre } (0, 0) \text{ et de rayon } 1$$

Représentation graphique de plusieurs fonctions

Le graphique de la relation peut s'obtenir en superposant les graphiques de deux fonctions

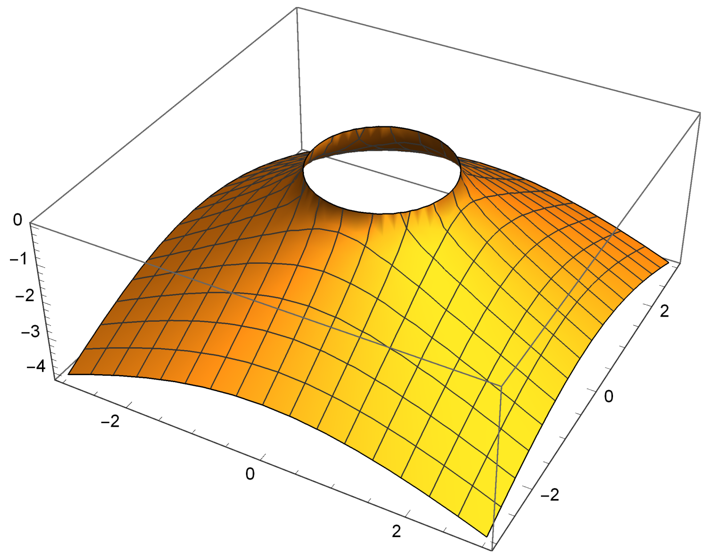
```
f1 = Plot3D[√(x² + y² - 1), {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```

tracé de surfaces



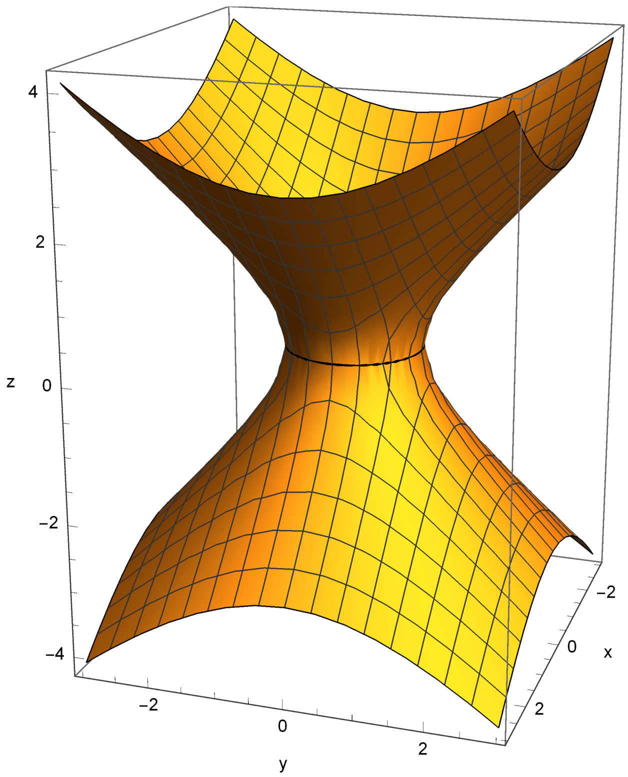

```
f2 = Plot3D[-√(x² + y² - 1), {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```

tracé de surfaces



```
Show[f1, f2, ViewPoint → {3, 1, 1},
AxesLabel → {"x", "y", "z"}, ImageSize → {400, 400},
  BoxRatios → Automatic, PlotRange → All]
```

montre · point de vue spatial · titre d'axe · taille d'image · rapports de b··· · automatique · zone de tracé · tout



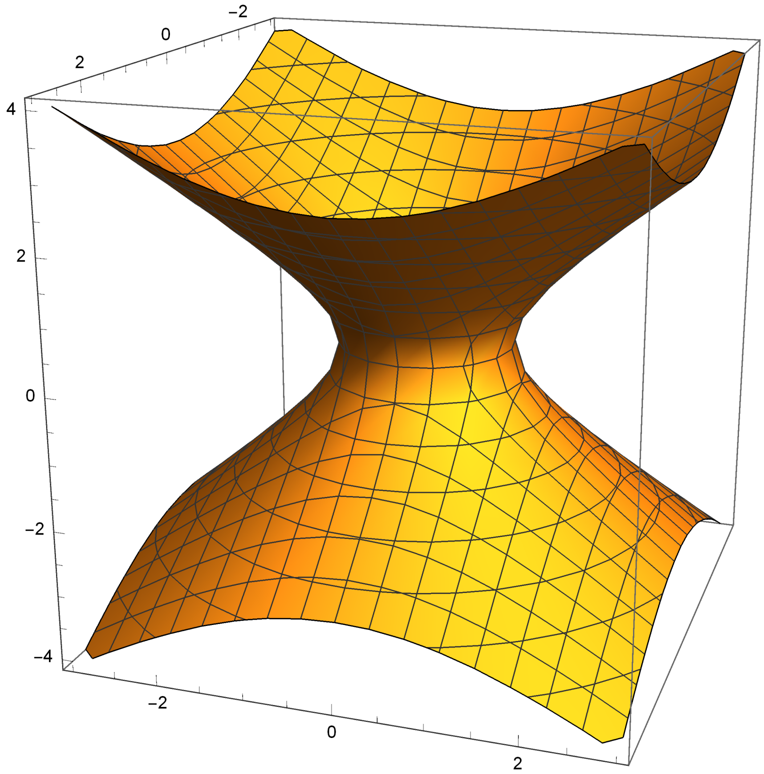
Plot3D représente une fonction $z = f(x, y)$ au moyen de *parallélogrammes curvilignes* (parfois appelés *facettes* ou *éléments de surface*).

Représentation graphique d'une relation

La procédure **ContourPlot3D** permet de représenter directement une relation décrite par l'équation implicite $g(x, y, z) = 0$. Mais le temps de calcul est alors plus long qu'avec **Plot3D**.

```
ContourPlot3D[x^2 + y^2 - z^2 - 1 == 0, {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
  {z, -4, 4}, ViewPoint → {3, 1, 1}, ImageSize → {400, 400}]
```

tracé 3D de champ scalaire par ses contours
point de vue spatial
taille d'image



Une telle surface du deuxième degré est appelée *hyperboloïde à une nappe*.

Exercices du § 1

Exercice 1-1 Portée du tir

En balistique, en supposant que le terrain est horizontal et qu'on néglige les frottements, on établit que la portée d'un tir est donnée par la formule

$$p = \frac{v_0^2 \sin(2\,\varphi)}{g}$$

avec les notations suivantes

v_0 désigne la norme de la vitesse initiale du projectile;

φ désigne l'angle d'élévation du tir (angle avec l'horizontale, exprimé en radians);

$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ qui est l'accélération gravifique;

p désigne la portée du tir (distance mesurée horizontalement).

a) Considérez l'expression donnée comme une fonction de plusieurs variables et dessinez son graphique avec *Mathematica*.
Observez la surface depuis plusieurs points de vue
(menu *Entrée / Sélecteur de vue 3D ... / Coller*).

b) Pour $v_0 = 60$, dessinez le graphique de la portée en fonction de l'angle d'élévation.
Pour $\varphi = 23\,°$, dessinez le graphique de la portée en fonction de la vitesse initiale.

c) Interprétez les graphiques de la partie b) dans une figure de la partie a).

Exercice 1-2 Exemples de surfaces du deuxième degré dans l'espace de dimension 3

Pour chaque équation qui suit,

1° exprimez, si possible, la relation au moyen d'une ou de plusieurs fonctions; déterminez l'ensemble de définition de chaque fonction;

2° dessinez la surface correspondante en utilisant d'abord **Plot3D** puis **ContourPlot3D**; désignez les axes au moyen de l'option **AxesLabel→{"x", "y", "z"}**.

a) Paraboloïde elliptique

équation : $z = x^2 + y^2$
fonction : $f(x, y) = x^2 + y^2$
ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}^2$

b) Paraboloïde hyperbolique

équation : $z = x^2 - y^2$
fonction : ...
ensemble de définition : ...

c) Ellipsoïde (cas particulier : la sphère)

équation : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
fonctions : $f_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; $f_2(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$
ensembles de définition : $D_{f_1} = D_{f_2} =$
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ = Disque fermé de centre $(0, 0)$ et de rayon 1

d) Hyperboloïde à deux nappes

équation : $x^2 + y^2 - z^2 = -1$
fonctions : ...
ensembles de définition : ...

e) Cône

équation : $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
fonctions : ...
ensembles de définition : ...

f) Cylindre

équation : $x^2 + z^2 = 1$
fonctions : ...
ensembles de définition : ...

g) Cylindre parabolique

équation : $z = x^2$
fonction : ...
ensemble de définition : ...

Exercice 1-3 Facultatif

Dans le but d'observer un objet géométrique depuis divers points de vue, on va créer une liste de graphiques représentant des vues lorsqu'on effectue un tour complet autour de l'objet tridimensionnel. Voici l'ossature d'un tel programme.

Il s'agit d'abord de créer une liste de points de vue. Choisissons par exemple une liste de 12 points uniformément répartis sur un cercle horizontal de rayon 3 sur la cote $z = 2$.

```
pv = Table[N[{3 Cos[φ], 3 Sin[φ], 2}], {φ, 0, 2 π, π/6}]
     table val… cosinus   sinus
```

Il s'agit ensuite de créer une liste de graphiques du même objet, les graphiques ne différant que par le point de vue:

```
Table[Plot3D[ ... , ViewPoint → pv[[j]],  ... ], {j, 1, Length[pv]}]
table  tracé de surfaces point de vue spatial              longueur
```

On pourra appliquer le procédé à deux fonctions étudiées au § 1-2

```
Plot3D[π r^2 h, {r, 0, 0.8}, {h, 0, 0.8}, BoxRatios → Automatic,
tracé de surfaces                        rapports de b… automatique
 ViewPoint → {3, 1, 1}, AxesLabel → {"r", "h", "V"}, ImageSize → {250, 250}]
 point de vue spatial   titre d'axe                  taille d'image
```

```
Plot3D[x^2 - y^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, BoxRatios → Automatic,
tracé de surfaces                        rapports de b… automatique
 ViewPoint → {3, 1, 1}, AxesLabel → {"x", "y", "z=f(x,y)"}, ImageSize → {250, 250}]
 point de vue spatial   titre d'axe                        taille d'image
```

Liens

Vers les corrigés des exercices des § 1-1, 1-2 et 1-3
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/corriges/plusieurs-variables/1-cor.pdf

Vers la page mère : Applications des mathématiques
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/index.html