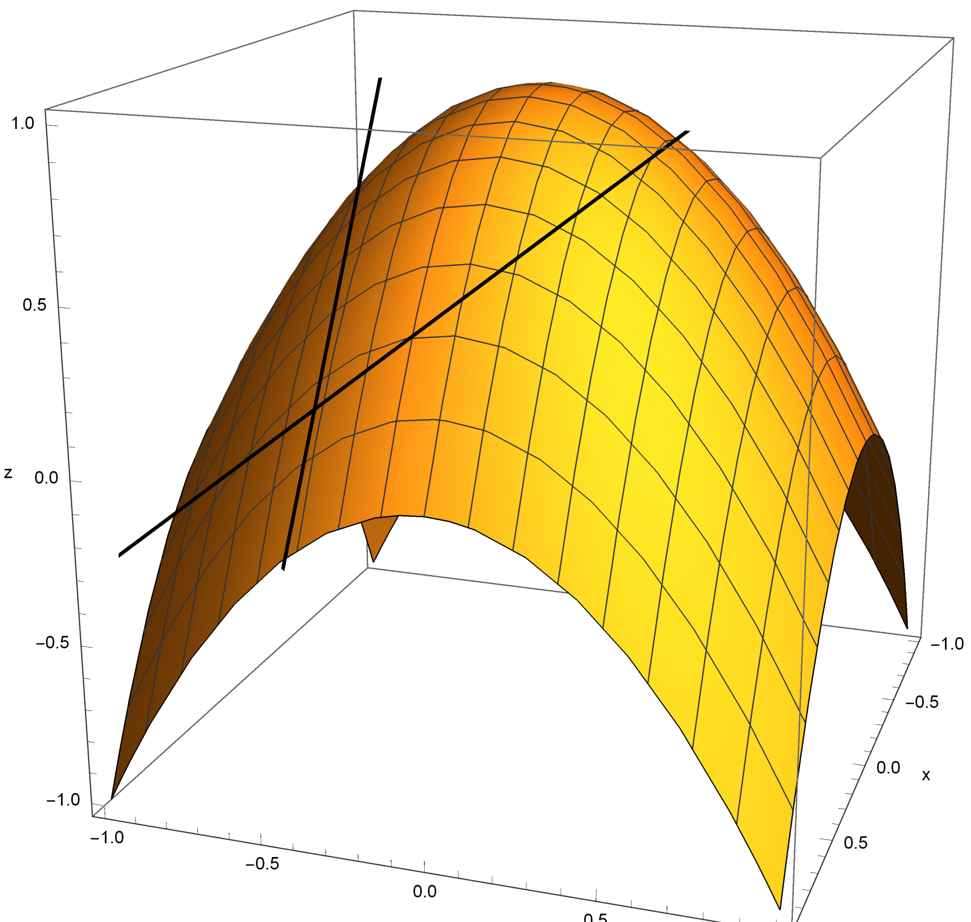
Applications des mathématiques

Fonctions de plusieurs variables et dérivées partielles



Version pour *Mathematica*

Edition 2017

Marcel Délèze

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/index.html

§ 1 Fonctions de plusieurs variables

§ 1-1 Relations et fonctions (fonctions d'une seule variable)

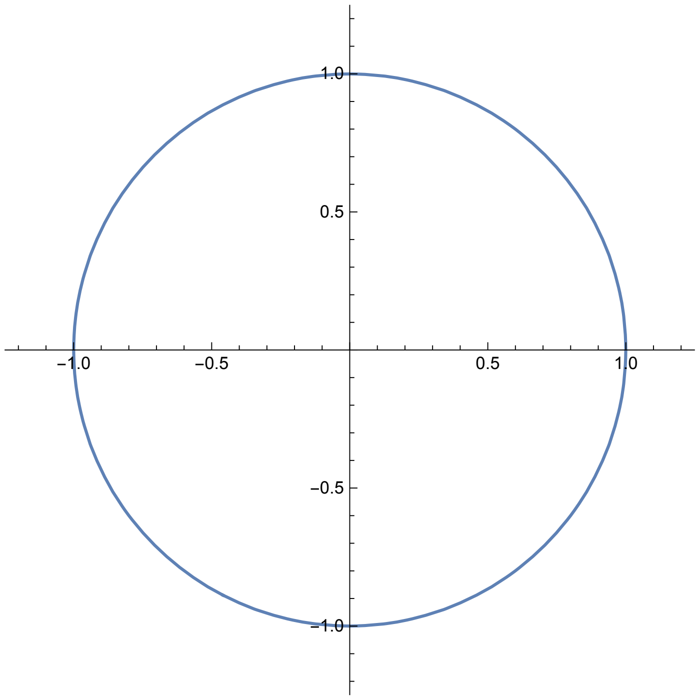
A titre d'exemple introductif, considérons une **relation** entre deux variables réelles

$$x^2 + y^2 = 1$$

```
ContourPlot[x^2 + y^2 == 1, {x, -1.2, 1.2}, {y, -1.2, 1.2},
 AspectRatio → Automatic, Frame → False, Axes → True]
```

tracé de champ scalaire par ses contours

rapport d'aspect | automatique | cadre | faux | axes | vrai



Rappelons que pour une fonction $y = f(x)$, à chaque x correspond une et une seule image y. Or, dans notre exemple, à $x = 0.6$ correspondent deux images distinctes $y = -0.8$ et $y = 0.8$. La relation n'est donc pas une fonction.

Une relation est souvent décrite par une **équation**. Dans notre exemple, il s'agit de l'équation du cercle de centre (0, 0) de rayon 1

$$x^2 + y^2 = 1$$

Une telle équation est dite **implicite** (ou irrésolue) parce que y n'est pas isolé. Pratiquement, pour passer de la forme relationnelle à la forme fonctionnelle, on isole y

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = -\sqrt{1 - x^2} \qquad \text{ou} \qquad y = \sqrt{1 - x^2}$$

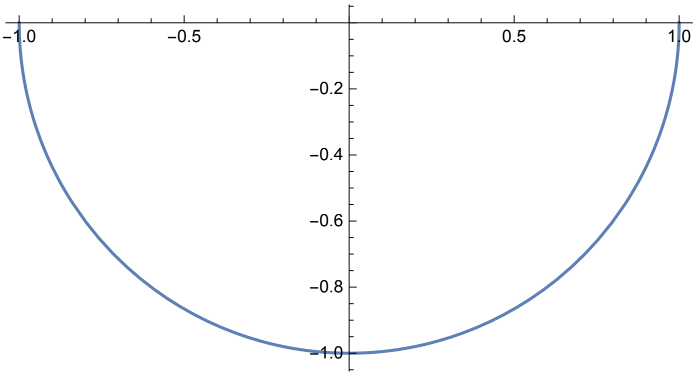
On obtient ainsi deux **équations explicites** (c'est-à-dire dans lesquelles y a été isolé).
Chaque équation explicite correspond à une fonction

$$f_1(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

$$f_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

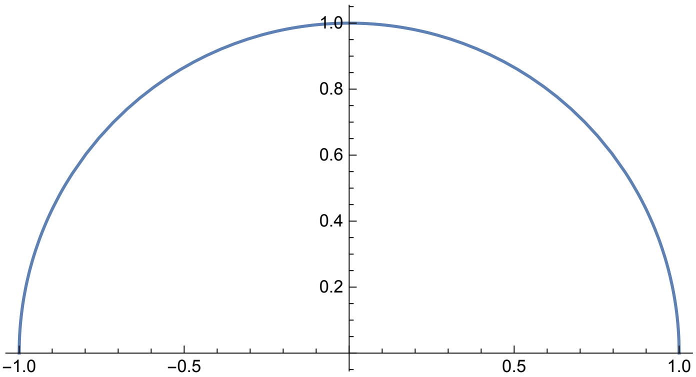
La première fonction a pour graphique le demi-cercle inférieur ($f_1(x) \le 0$)

```
Plot[-√(1 - x²), {x, -1, 1}, AspectRatio → Automatic]
```
tracé de courbes rapport d'aspect automatique



La deuxième fonction a pour graphique le demi-cercle supérieur ($f_1(x) \geq 0$)

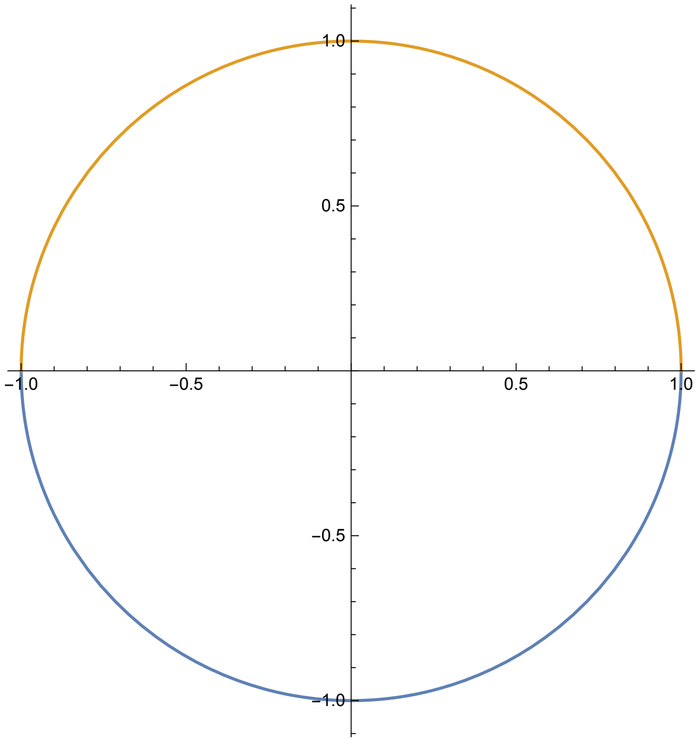
```
Plot[√(1 - x²), {x, -1, 1}, AspectRatio → Automatic]
```
tracé de courbes rapport d'aspect automatique



On peut réaliser le graphique de la relation en superposant les graphiques de deux fonctions

```
Plot[{-Sqrt[1 - x^2], Sqrt[1 - x^2]}, {x, -1, 1}, AspectRatio → Automatic]
```

tracé de courbes — rapport d'aspect — automatique



Dans cette introduction, nous sommes partis d'une relation entre deux variables pour aboutir à des fonctions d'une seule variable. Nous verrons des exemples où, en partant d'une relation entre trois variables, nous aboutirons à des fonctions de deux variables.

Il est important de bien distinguer les relations des fonctions. En *Mathematica*,

* le graphique d'une <u>relation</u> se réalise avec **ContourPlot[...]** ou **ContourPlot3D[...]** tandis que
* le graphique d'une <u>fonction</u> se réalise avec **Plot[...]** ou **Plot3D[...]**.

§ 1-2 Graphique d'une fonction (de plusieurs variables)

Exemple 1 : volume du cylindre

r et *h* désignant respectivement le rayon et la hauteur d'un cylindre, le volume *V* a pour expression analytique

$$V = \pi\, r^2\, h$$

L'ensemble de définition est le premier quadrant du plan

$$D = \{(r,\ h) \mid r \geq 0 \text{ et } h \geq 0\}$$

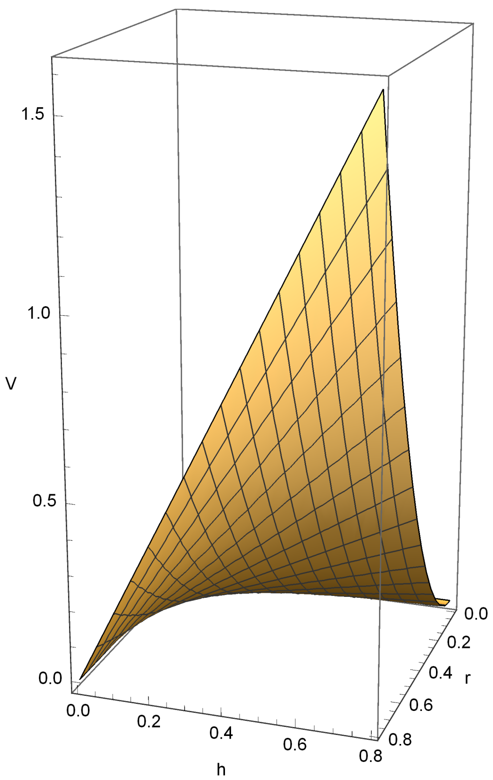
La fonction "volume du cylindre" associe à chaque paire (r, h) le nombre réel correspondant V. Formellement,

$$V : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(r,\ h) \mapsto V(r,\ h) = \pi\, r^2\, h$$

La représentation graphique nécessite deux dimensions pour (r, h) et une dimension pour V. Le graphique sera donc réalisé dans un espace à 3 dimensions:

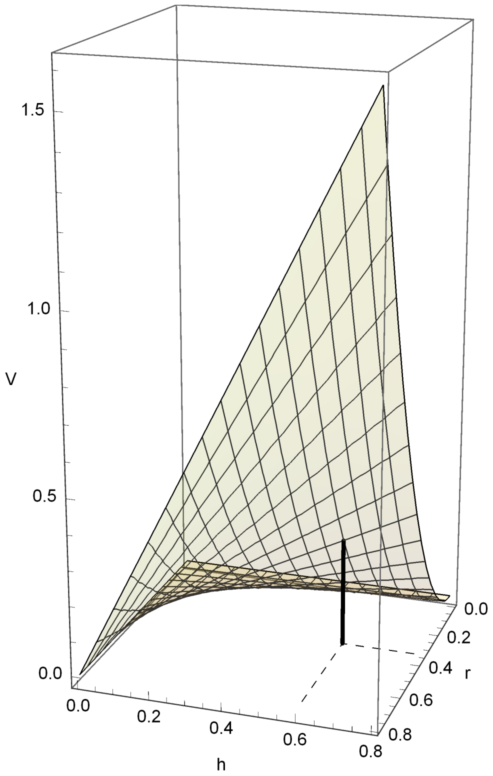
```
Plot3D[π r^2 h, {r, 0, 0.8}, {h, 0, 0.8}, ColorFunction → False, BoxRatios → Automatic,
 ViewPoint → {3, 1, 1}, AxesLabel → {"r", "h", "V"}, ImageSize → {400, 400}]
```

tracé de surfaces · fonction de couleur · faux · rapports de b··· · automatique
point de vue spatial · titre d'axe · taille d'image



<u>Lecture du graphique</u> (voir la figure ci-dessous)

Au point $(r,\ h) = (0.4;\ 0.6)$ situé à l'intersection des lignes en traitillé correspond la valeur $V = \pi\, 0.4^2 \times 0.6 \simeq 0.3016$ figuré par la mesure algébrique du trait épais (cote).



Exemple 2 : distance OP dans un plan

O(0; 0) désigne l'origine du repère du plan. Les coordonnées d'un point *P* étant *P*(*x*, *y*), l'expression de la distance *d* = OP est

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

L'ensemble de définition est tout le plan

$$D = \mathbb{R}^2$$

La fonction "distance OP" associe à chaque paire (*x*, *y*) le nombre réel correspondant *d* = OP. Formellement,

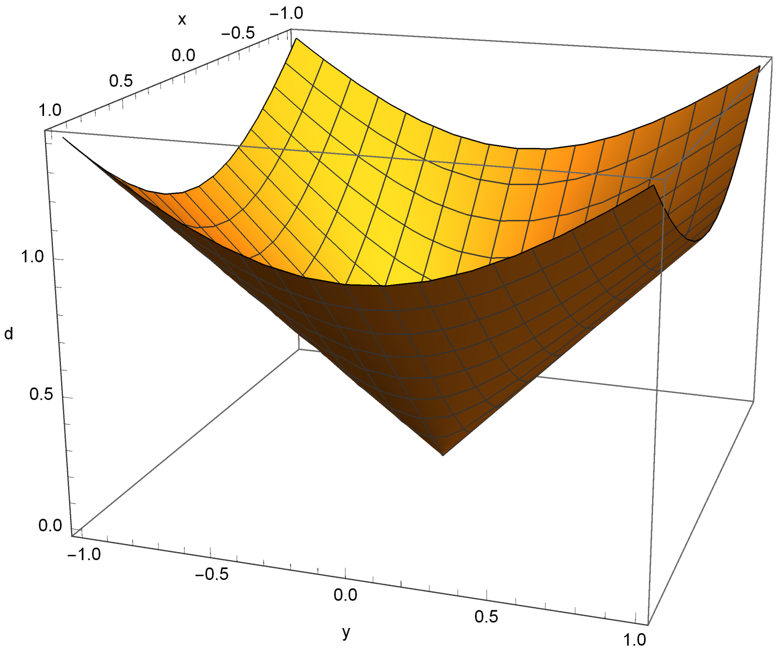
$$d: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La représentation graphique est la suivante

```
Plot3D[Sqrt[x^2 + y^2], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, BoxRatios → Automatic,
 ViewPoint → {3, 1, 1}, AxesLabel → {"x", "y", "d"}, ImageSize → {400, 400}]
```

tracé de surfaces · rapports de b··· · automatique · point de vue spatial · titre d'axe · taille d'image



Exemple 3 : distance OP dans l'espace

$O(0;\ 0;\ 0)$ désigne l'origine du repère de l'espace. Les coordonnées d'un point P étant $P(x,\ y,\ z)$, l'expression de la distance $d = \mathrm{OP}$ est

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

L'ensemble de définition est tout l'espace

$$D_d = \mathbb{R}^3$$

La fonction "distance OP" associe à chaque triple (x, y, z) le nombre réel correspondant $d = \mathrm{OP}$. Formellement,

$$\begin{aligned} d :\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,\ y,\ z) &\mapsto d\,(x,\ y,\ z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

La représentation graphique nécessite un espace de dimension 4. Elle n'est donc pas possible dans l'espace usuel de dimension 3.

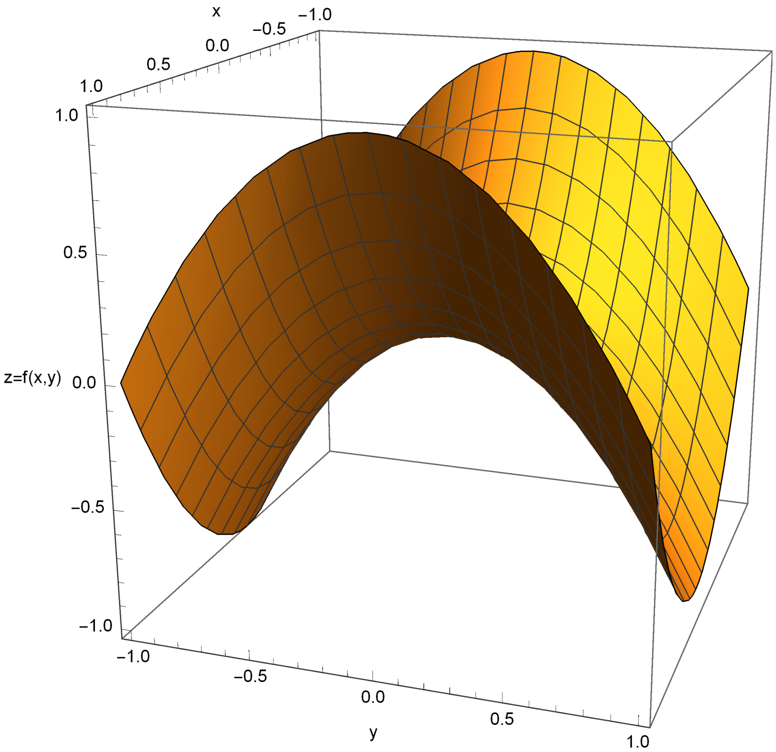
Exemple 4 : selle (paraboloïde hyperbolique)

$$\begin{aligned} f :\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,\ y) &\mapsto f\,(x,\ y) = x^2 - y^2 \end{aligned}$$

La représentation graphique a la forme d'une selle de cheval

```
Plot3D[x^2 - y^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, BoxRatios → Automatic,
ViewPoint → {3, 1, 1}, AxesLabel → {"x", "y", "z=f(x,y)"}, ImageSize → {400, 400}]
```

tracé de surfaces · rapports de b··· · automatique · point de vue spatial · titre d'axe · taille d'image



Généralisation

L'ensemble de définition D_f d'une fonction f de n variables est une partie de l'espace affine de dimension n

$$D_f \subset \mathbb{R}^n$$

Une fonction de n variables fait correspondre à chaque n-tuple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un et un seul nombre réel noté $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Symboliquement,

$$f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Restrictions à une seule variable

Reprenons l'exemple du volume du cylindre

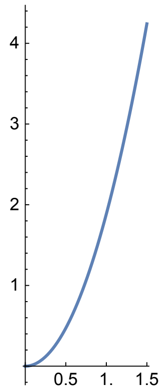
$$(r, h) \mapsto V(r, h) = \pi r^2 h$$

En fixant la hauteur, par exemple $h = 0.6$, on obtient une fonction d'une seule variable r

$$r \mapsto V(r, h) = \pi r^2 h$$

dont le graphique est

```
Plot[π r² 0.6, {r, 0, 1.5}, AspectRatio → Automatic,
tracé de courbes             rapport d'aspect automatique
 ImageSize → {200, 200}, Ticks → {N[Range[0, 3/2, 1/2]], Automatic}]
 taille d'image               graduati··· ·· plage    automatique
```

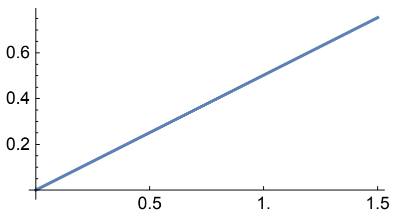


En fixant le rayon, par exemple $r = 0.4$, on obtient une fonction d'une seule variable h

$$h \mapsto V(r, h) = \pi r^2 h$$

dont le graphique est

```
Plot[π 0.4² h, {h, 0, 1.5}, AspectRatio → Automatic,
tracé de courbes             rapport d'aspect automatique
 ImageSize → {200, 200}, Ticks → {N[Range[0, 3/2, 1/2]], Automatic}]
 taille d'image               graduati··· ·· plage    automatique
```



Exercices

Les exercices du § 1 sont regroupés à la fin du § 1-3

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/plusieurs-variables/1-3_DERIVEES_PARTIELLES.pdf