Marcel Délèze
Edition 2017

§ 2 Méthodes de résolution de l'équation $f(x) = 0$

§ 2.1 Méthode graphique

Nous verrons qu'un graphique ne constitue pas une méthode générale de résolution des équations. Cependant, un graphique peut nous apporter des informations utiles dont nous pourrons tirer parti.

Dans cette partie, il ne nous importe pas de savoir si les graphiques ont été réalisés à la main ou par ordinateur. Nous porterons plutôt notre attention sur les questions suivantes :

quel graphique faire ?

que nous dit le graphique au sujet des solutions de l'équation ?

Exemple 1

Soit à résoudre l'équation

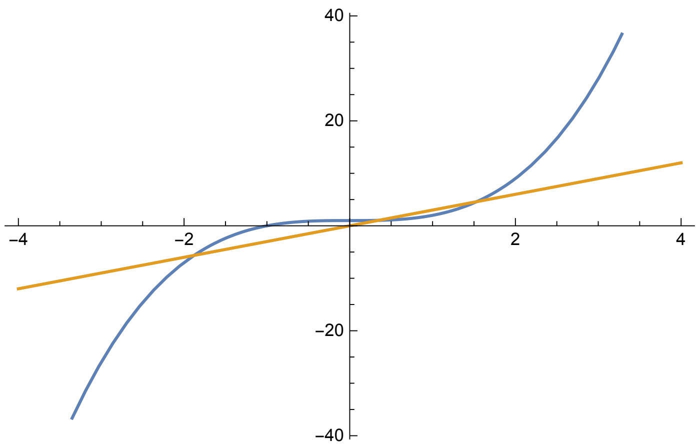
$$x^3 + 1 = 3x$$

Premier point de vue

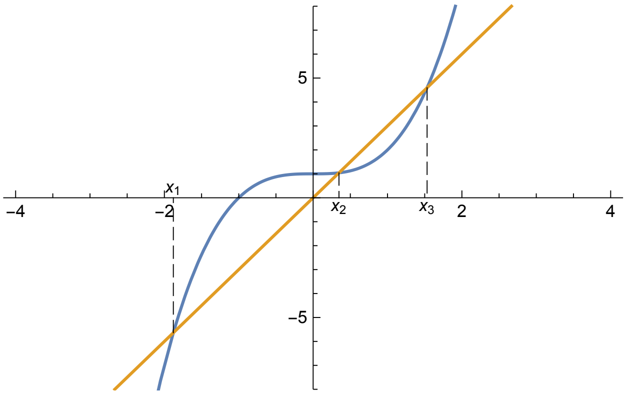
Considérons qu'il s'agit d'une équation de la forme $g(x) = h(x)$
avec $g(x) = x^3+1$ et $h(x) = 3x$.
Dessinons la situation.

```
Plot[{x^3 + 1, 3 x}, {x, -4, 4}]
```

tracé de courbes



Résoudre une équation signifie rechercher les abscisses des points d'intersection de deux courbes.
Les solutions sont à lire sur l'axe des x : on y voit trois solutions x_1, x_2, x_3.
Au lieu de dire "solutions", on dit aussi racines.



Un graphique peut montrer qu'une équation possède une ou plusieurs solutions et permet de les localiser approximativement.

Deuxième point de vue

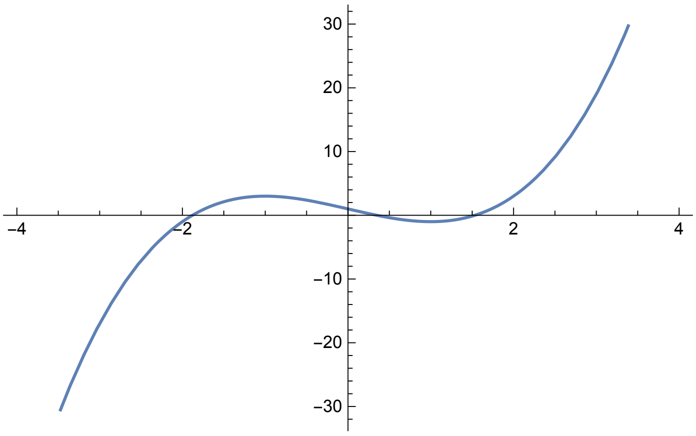
Passons tous les termes de l'équation dans le premier membre

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

L'équation prend la forme f(x) = 0.
Dessinons la situation.

```
Plot[x^3 - 3 x + 1, {x, -4, 4}]
```

tracé de courbes



Résoudre une équation signifie **rechercher les zéros d'une fonction**.
Les solutions sont situées à l'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. On y voit trois racines.
Dans la suite du cours, nous adopterons le plus souvent ce deuxième point de vue.

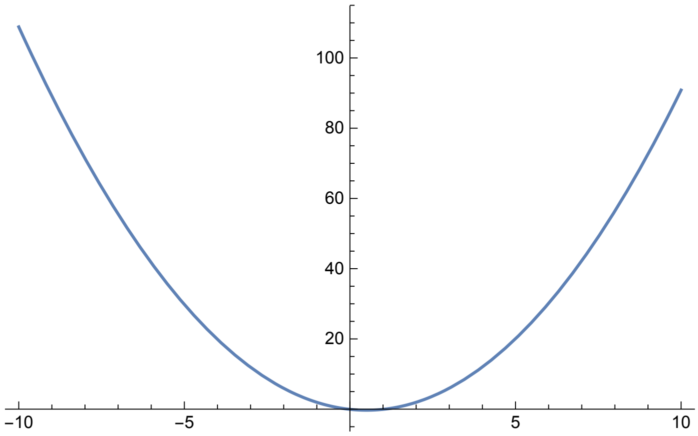
Exemple 2

Recherchons graphiquement les solutions de l'équation

$$0.001 x^3 + 0.999 x^2 - x - 0.05 = 0$$

```
Plot[0.001 x^3 + 0.999 x^2 - x - 0.05, {x, -10, 10}]
```

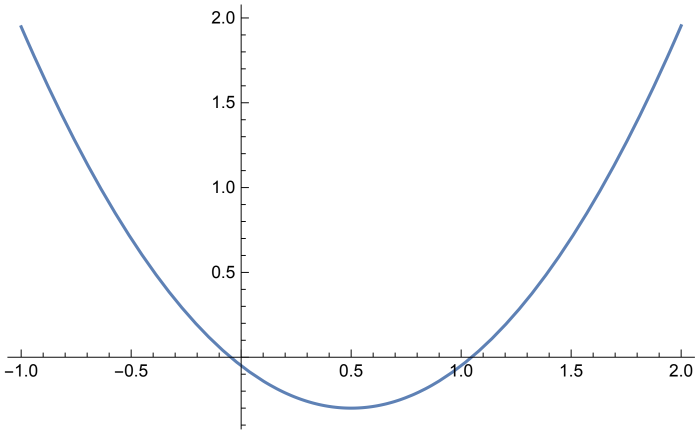
tracé de courbes



Au premier abord, il semblerait que l'équation possède une solution.
Effectuons un zoom pour observer ce qui se passe au voisinage de 0.

```
Plot[0.001 x^3 + 0.999 x^2 - x - 0.05, {x, -1, 2}]
```

tracé de courbes

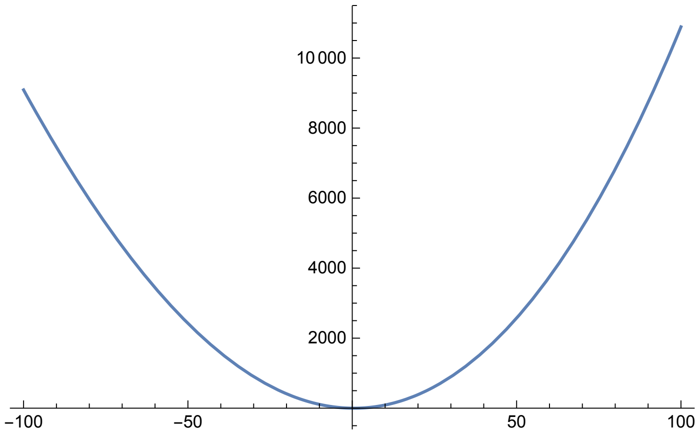


On voit maintenant que l'équation possède deux solutions distinctes $x_1 \simeq 0$ et $x_2 \simeq 1$.

Pour savoir si l'équation possède d'autres racines, prenons un intervalle plus large

```
Plot[0.001 x^3 + 0.999 x^2 - x - 0.05, {x, -100, 100}]
```

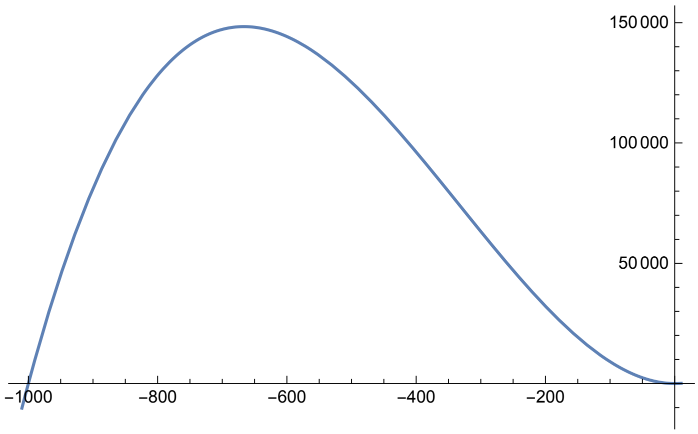
tracé de courbes



A ce stade, on peut être tenté de conclure que l'équation possède exactement deux solutions.

Or, c'est faux. L'équation possède une troisième racine $x_3 \approx -1000$

```
Plot[0.001 x^3 + 0.999 x^2 - x - 0.05, {x, -1010, 10}]
```
tracé de courbes



Nous savons qu'il n'y a pas de quatrième solution. Ce n'est pas un graphique qui peut nous le dire mais **un raisonnement** : l'équation est polynomiale du troisième degré.

Un graphique peut montrer l'existence de solutions mais il ne permet pas, en général, de déterminer le nombre de solutions.

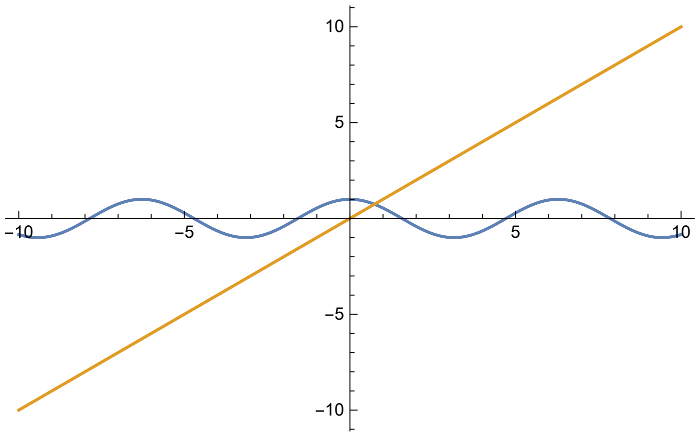
Exemple 3

Il existe cependant des cas particuliers où un graphique permet de déterminer le nombre de solutions. Mais il faut alors impérativement savoir comment le graphique continue dans le plan au-delà de la partie dessinée, jusqu'à l'infini.

Pour x exprimé en radians, considérons l'équation

$$\cos(x) = x$$

```
Plot[{Cos[x], x}, {x, -10, 10}]
```
tracé··· cosinus



Etant donné qu'une fonction est linéaire et que l'autre est périodique, nous pouvons aisément nous représenter comment les deux courbes se poursuivent au-delà de la partie dessinée, jusqu'à l'infini. Dans ce cas, nous pouvons nous convaincre que l'équation possède une et une seule solution.

Plus généralement, c'est une **étude de fonction** qu'il faudrait faire.

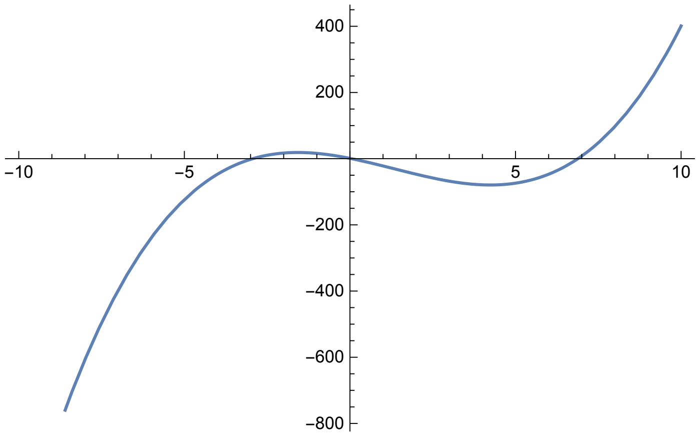
Exemple 4 et définitions

Considérons l'équation

$$x^3 - 4x^2 - 20x + 1 = 0$$

```
Plot[x^3 - 4 x^2 - 20 x + 1, {x, -10, 10}]
```

tracé de courbes



De chaque solution de l'équation, on peut donner <u>une approximation numérique</u> :

$$x_1 \approx -2.9, \quad x_2 \approx 0, \quad x_3 \approx 7.$$

On peut également encadrer chaque solution :

$$-5 < x_1 < 0, \quad -2 < x_2 < 2, \quad 5 < x_3 < 10.$$

Par contre $5 < x_3 < \infty$ n'est pas un encadrement de x_3 car

<u>encadrer une racine</u> signifie donner un intervalle

1°　fini,

2°　inclus dans l'ensemble de définition de la fonction et

3°　contenant au moins une racine.

L'encadrement des racines

$$x_1 \in]-5;\ 0[, \quad x_2 \in]-2;\ 2[, \quad x_3 \in]5;\ 10[$$

ne sépare pas les racines car les intervalles]-5; 0[et]-2; 2[ne sont pas disjoints.

<u>Séparer les racines</u> signifie encadrer chaque racine de telle sorte que chaque intervalle contienne une et une seule solution.

Par exemple,

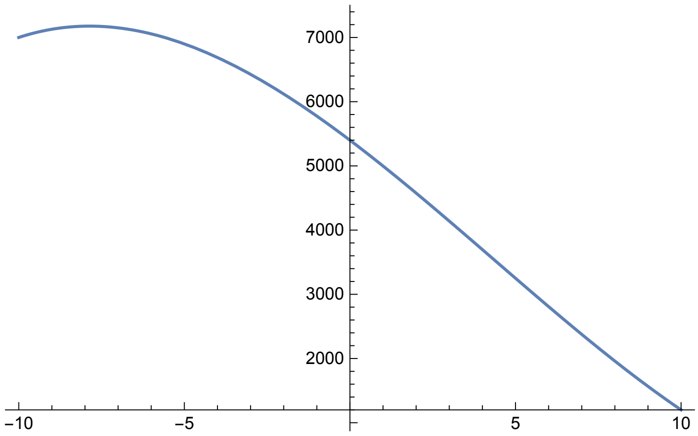
$$x_1 \in]-4;\ -2[, \quad x_2 \in]-1;\ 1[, \quad x_3 \in]6;\ 8[$$

Exemple 5

Considérons l'équation

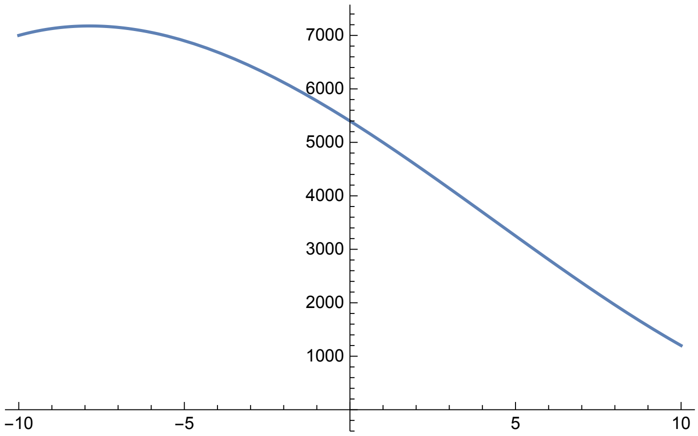
$$5400 - 390x - 13x^2 + x^3 = 0$$

```
Plot[5400 - 390 x - 13 x^2 + x^3, {x, -10, 10}]
```
tracé de courbes



On pourrait être tenté de dire que l'équation possède une solution $x_1 \approx 10$. Remarquez cependant que l'axe horizontal n'a pas été dessiné à la hauteur $y = 0$. Pour prévenir cette erreur d'inattention, il est prudent d'inclure la directive suivante

```
Plot[5400 - 390 x - 13 x^2 + x^3, {x, -10, 10}, AxesOrigin → {Automatic, 0}]
```
tracé de courbes origine des axes automatique



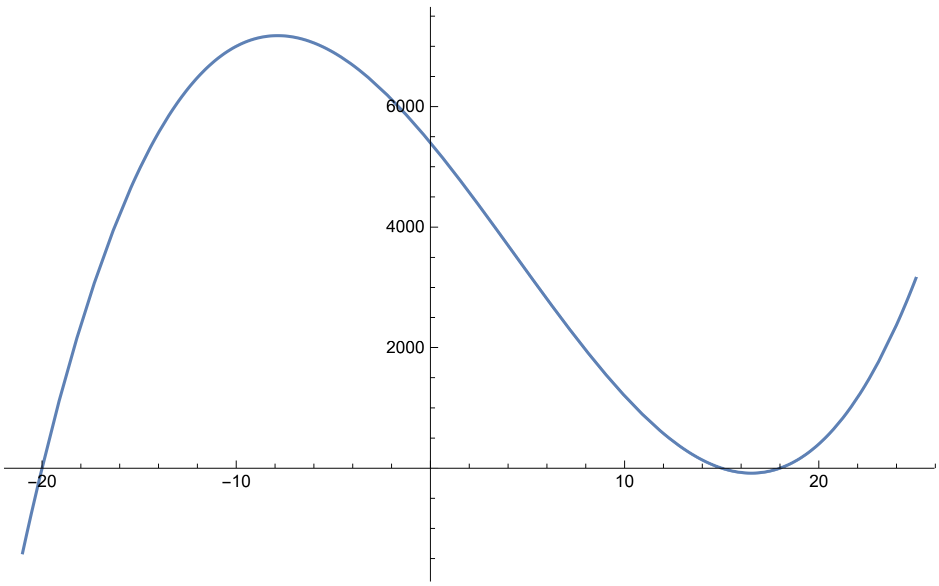
Pour éviter d'avoir à insérer cette option dans chaque commande **Plot**, on peut déclarer cette option active jusqu'à la fin de la session en cours, c'est-à-dire jusqu'à ce que l'on quitte le *Noyau*.

```
SetOptions[Plot, AxesOrigin → {Automatic, 0}, ImageSize → {500, 300}]
```
alloue options · tracé·· · origine des axes · automatique · taille d'image

```
{AlignmentPoint → Center, AspectRatio → 1/GoldenRatio, Axes → True,
 AxesLabel → None, AxesOrigin → {Automatic, 0}, AxesStyle → {}, Background → None,
 BaselinePosition → Automatic, BaseStyle → {}, ClippingStyle → None,
 ColorFunction → Automatic, ColorFunctionScaling → True, ColorOutput → Automatic,
 ContentSelectable → Automatic, CoordinatesToolOptions → Automatic,
 DisplayFunction :→ $DisplayFunction, Epilog → {}, Evaluated → Automatic,
 EvaluationMonitor → None, Exclusions → Automatic, ExclusionsStyle → None,
 Filling → None, FillingStyle → Automatic, FormatType :→ TraditionalForm,
 Frame → False, FrameLabel → None, FrameStyle → {}, FrameTicks → Automatic,
 FrameTicksStyle → {}, GridLines → None, GridLinesStyle → {}, ImageMargins → 0.,
 ImagePadding → All, ImageSize → {500, 300}, ImageSizeRaw → Automatic,
 LabelStyle → {}, MaxRecursion → Automatic, Mesh → None, MeshFunctions → {#1 &},
 MeshShading → None, MeshStyle → Automatic, Method → Automatic,
 PerformanceGoal :→ $PerformanceGoal, PerformanceGoal :→ $PerformanceGoal,
 PlotLabel → None, PlotLabels → None, PlotLegends → None, PlotPoints → Automatic,
 PlotRange → {Full, Automatic}, PlotRangeClipping → True, PlotRangePadding → Automatic,
 PlotRegion → Automatic, PlotStyle → Automatic, PlotTheme :→ $PlotTheme,
 PreserveImageOptions → Automatic, Prolog → {}, RegionFunction → (True &),
 RotateLabel → True, ScalingFunctions → None, TargetUnits → Automatic,
 Ticks → Automatic, TicksStyle → {}, WorkingPrecision → MachinePrecision}
```

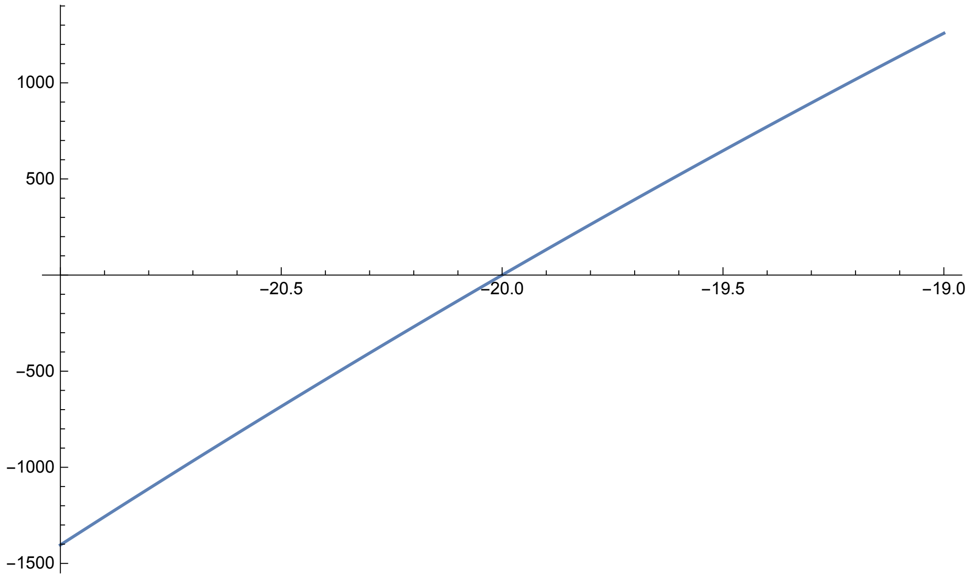
On peut maintenant partir à la recherche des zéros avec moins de risque d'erreur dans la lecture des graphiques.

```
Plot[5400 - 390 x - 13 x^2 + x^3, {x, -21, 25}]
```
tracé de courbes



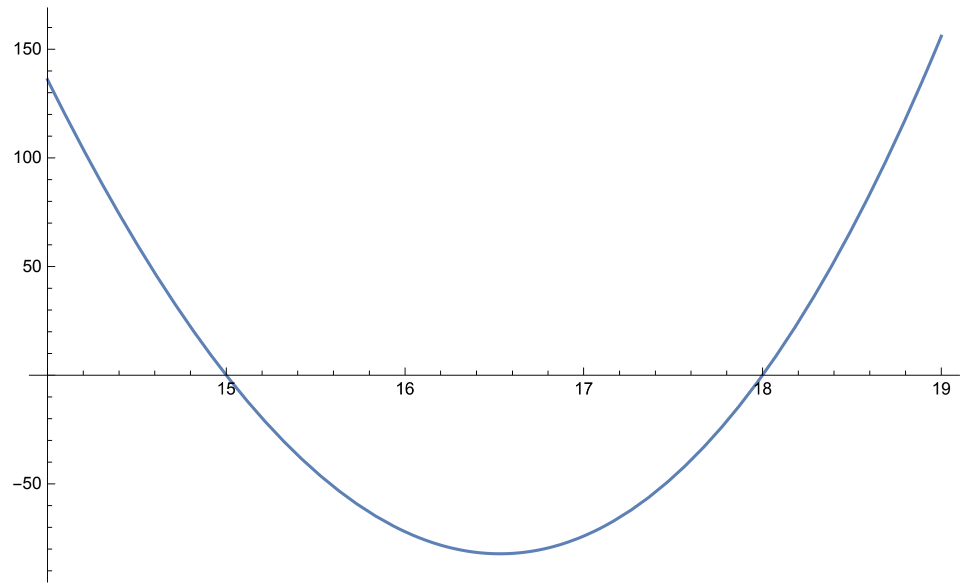
```
Plot[5400 - 390 x - 13 x^2 + x^3, {x, -21, -19}]
```

tracé de courbes




```
Plot[5400 - 390 x - 13 x^2 + x^3, {x, 14, 19}]
```

tracé de courbes



Exercice 2-1- P 1

Dans le problème 1-1, pour $A = 100$ et $h = 10$, déterminez graphiquement la valeur de r. Encadrez chaque solution entre deux entiers. Séparez les solutions obtenues (si nécessaire). Dites si vous avez obtenu l'ensemble des solutions.

Exercice 2-1-P 2

Dans le problème 1-2, pour $A = 80$ et $p = 5$, déterminez graphiquement la valeur de q. Encadrez chaque solution entre deux entiers. Séparez les solutions obtenues (si nécessaire). Dites si vous avez obtenu l'ensemble des solutions.

Exercice 2-1-P 3

Dans le problème 1-3, pour $r = 50$, $\rho_0 = 1000$ et $\rho_1 = 900$, déterminez graphiquement la valeur de h.

Encadrez chaque solution entre deux entiers. Séparez les solutions obtenues (si nécessaire).

Dites si vous avez obtenu l'ensemble des solutions.

Exercice 2-1-P 4

Dans le problème 1-4, pour $t = 30$ %, déterminez graphiquement la valeur de l'angle α.

Encadrez chaque solution entre deux nombres arrondis au $\frac{1}{10}$ de radian. Séparez les solutions obtenues (si nécessaire).

Dites si vous avez obtenu l'ensemble des solutions.

Exercice 2-1-P 5

Dans le problème 1-5, pour $c = 10'000$, $n = 8$, $a = 2'000$, déterminez graphiquement la valeur du taux i.

Encadrez chaque solution entre deux nombres entiers de %. Séparez les solutions obtenues (si nécessaire).

Dites si vous avez obtenu l'ensemble des solutions.

§ 2.2 Méthode de la bissection

Étymologie

Bissection signifie "couper en deux".

Exemple 1

Pour décrire la méthode de la bissection, prenons comme exemple l'équation

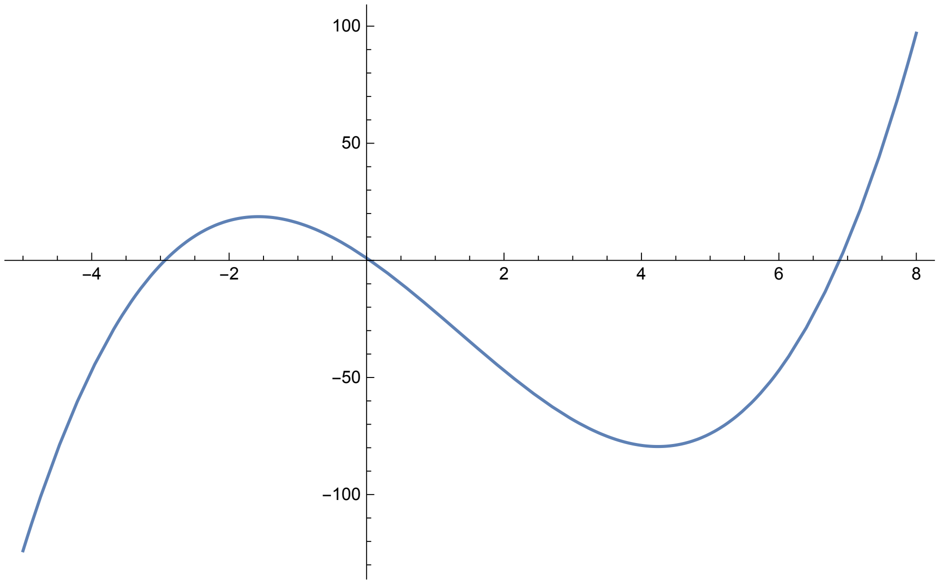
$$x^3 - 4x^2 - 20x + 1 = 0$$

Etape 1 : encadrement et séparation des racines

```
Clear[f, x]; f[x_] := x^3 - 4 x^2 - 20 x + 1
```
efface

Nous avons vu, dans le § 2-1, comment on peut encadrer les racines par une méthode graphique.

```
Plot[f[x], {x, -5, 8}, AxesOrigin → {Automatic, 0}]
```
tracé de courbes origine des axes automatique



Si on ne dispose pas de l'ordinateur pour faire des graphiques, il existe une méthode plus économique pour encadrer les racines : c'est de **<u>repérer les intervalles sur lesquels la fonction change de signe</u>**. Effectuons une première tabulation

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
***Sign*(*f*(*x*))**	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1

De cette tabelle, sachant que la fonction est continue, nous pouvons déduire les encadrements

$$x_1 \in]-3;\ -2[, \quad x_2 \in]0;\ 1[, \quad x_3 \in]6;\ 7[$$

Etape 2-1 : bissection pour x_1

Il faut commencer par fixer la précision à laquelle nous voulons parvenir. Dans notre exemple, choisissons une précision de ± 0.001

Rappelons-nous que la fonction *f* est négative à gauche de l'intervalle et positive à droite :

```
{Sign[f[-3]], Sign[f[-2]]}
```
signe signe

```
{-1, 1}
```

Calculons le signe de la fonction au milieu de l'intervalle :

```
Sign[f[-2.5]]
```
signe

```
1
```

La fonction change de signe entre -3 et -2.5. Nous en déduisons un nouvel encadrement :
$x_1 \in]-3;\ -2.5[$

Recommençons l'opération. Calculons le signe de la fonction au milieu du nouvel intervalle:

```
Sign[f[-2.75]]
```
signe

```
1
```

La fonction change de signe entre -3 et -2.75. Nous en déduisons un nouvel encadrement :
$x_1 \in]-3;\ -2.75[$

Poursuivons les calculs et présentons la suite des encadrements successifs dans un tableau :

a	$Sign(f(a))$	b	$Sign(f(b))$	$\frac{a+b}{2}$	$Sign(f(\frac{a+b}{2}))$
-3.	-1	-2.	1	-2.5	1
-3.	-1	-2.5	1	-2.75	1
-3.	-1	-2.75	1	-2.875	1
-3.	-1	-2.875	1	-2.9375	-1
-2.9375	-1	-2.875	1	-2.90625	1
-2.9375	-1	-2.90625	1		

Si $\mathrm{sign}(f(\frac{a+b}{2}))=-1$, alors $\frac{a+b}{2}$ se place dans la colonne de gauche *a*, sinon il se place dans la colonne de droite *b*.

Lorsqu'on fait les calculs à la main, on observe un phénomène désagréable : le nombre de chiffres après la virgule augmente. Etant donné qu'on désire un résultat à la précision d'un millième, nous pouvons arrondir les résultats à trois chiffres après le point décimal. La méthode de la bissection est itérée jusqu'à l'obtension de la précision souhaitée. Dans notre exemple, on y parvient en 9 étapes.

a	$Sign(f(a))$	b	$Sign(f(b))$	$\frac{a+b}{2}$	$Sign(f(\frac{a+b}{2}))$
-3.	-1	-2.	1	-2.5	1
-3.	-1	-2.5	1	-2.75	1
-3.	-1	-2.75	1	-2.875	1
-3.	-1	-2.875	1	-2.938	-1
-2.938	-1	-2.875	1	-2.907	1
-2.938	-1	-2.907	1	-2.923	1
-2.938	-1	-2.923	1	-2.931	1
-2.938	-1	-2.931	1	-2.934	-1
-2.934	-1	-2.931	1	-2.932	1
-2.934	-1	-2.932	1		

Réponse : $x_1 = -2.933 \pm 0.001$

En 9 itérations, la longueur de l'intervalle est passée de 1 à 0.002, c'est-à-dire a été divisée par 500.

A chaque itération, la longueur de l'intervalle a été divisée par 2. En 9 itérations, elle a été divisée par $2^9 = 512$ (arrondi à 500).

Etape 2-2 : bissection pour x_2

Rappelons-nous que la fonction *f* est positive à gauche de l'intervalle et négative à droite :

```
{Sign[f[0]], Sign[f[1]]}
 signe        signe
```

```
{1, -1}
```

Calculons le signe de la fonction au milieu de l'intervalle :

```
Sign[f[0.5]]
signe
```

```
-1
```

La fonction change de signe entre 0 et 0.5. Nous en déduisons un nouvel encadrement :
$x_2 \in]\ 0;\ 0.5[$

Recommençons l'opération. Calculons le signe de la fonction au milieu du nouvel intervalle:

```
Sign[f[0.25]]
signe
```

```
-1
```

La fonction change de signe entre 0 et 0.25. Nous en déduisons un nouvel encadrement :
$x_2 \in]\ 0;\ 0.25[$

Poursuivons les calculs et présentons la suite des approximations successives dans un tableau :

a	$Sign(f(a))$	b	$Sign(f(b))$	$\frac{a+b}{2}$	$Sign(f(\frac{a+b}{2}))$
0.	1	1.	-1	0.5	-1
0.	1	0.5	-1	0.25	-1
0.	1	0.25	-1	0.125	-1
0.	1	0.125	-1	0.062	-1
0.	1	0.062	-1	0.031	1
0.031	1	0.062	-1	0.046	1
0.046	1	0.062	-1	0.054	-1
0.046	1	0.054	-1	0.05	-1
0.046	1	0.05	-1	0.048	1
0.048	1	0.05	-1		

Réponse : $x_2 = 0.049 \pm 0.001$

Si $\text{sign}(f(\frac{a+b}{2})) = +1$, alors $\frac{a+b}{2}$ se place dans la colonne de gauche *a*, sinon il se place dans la colonne de droite *b*.

Etape 2-3 : bissection pour x_3

Rappelons-nous que la fonction f est négative à gauche de l'intervalle et positive à droite :

```
{Sign[f[6]], Sign[f[7]]}
 signe        signe
```

```
{-1, 1}
```

Calculons le signe de la fonction au milieu de l'intervalle :

```
Sign[f[6.5]]
signe
-1
```

La fonction change de signe entre 6.5 et 7. Nous en déduisons un nouvel encadrement :
$x_3 \in]\,6.5;\ 7\,[$

Recommençons l'opération. Calculons le signe de la fonction au milieu du nouvel intervalle:

```
Sign[f[6.75]]
signe
-1
```

La fonction change de signe entre 6.75 et 7. Nous en déduisons un nouvel encadrement :
$x_3 \in]\,6.75;\ 7\,[$

Poursuivons les calculs et présentons la suite des encadrements successifs dans un tableau :

a	$Sign(f(a))$	b	$Sign(f(b))$	$\frac{a+b}{2}$	$Sign(f(\frac{a+b}{2}))$
6.	-1	7.	1	6.5	-1
6.5	-1	7.	1	6.75	-1
6.75	-1	7.	1	6.875	-1
6.875	-1	7.	1	6.938	1
6.875	-1	6.938	1	6.906	1
6.875	-1	6.906	1	6.89	1
6.875	-1	6.89	1	6.882	-1
6.882	-1	6.89	1	6.886	1
6.882	-1	6.886	1	6.884	-1
6.884	-1	6.886	1		

Réponse : $x_3 = 6.885 \pm 0.001$

Si $\mathrm{sign}(f(\frac{a+b}{2}))=-1$, alors $\frac{a+b}{2}$ se place dans la colonne de gauche *a*, sinon il se place dans la colonne de droite *b*.

Comparez les calculs de x_1, x_2 et x_3 et déterminez une règle unique pour savoir dans quelle colonne
de la ligne suivante se place $\frac{a+b}{2}$. La règle doit recouvrir les deux cas :

* passage de -1 à +1 (pour x_1 et x_3);
* passage de +1 à -1 (pour x_2).

Erreur sur le résultat

La dernière réponse fournie par la méthode de la bissection est de la forme

$$x \in [a;\ b]$$

On écrit alors la réponse finale sous la forme

$$x = \frac{a+b}{2} \pm \frac{b-a}{2}$$

en arrondissant ensuite les valeurs numériques.

Critère d'arrêt

Au départ, on se donne une précision Δx et on poursuit les calculs jusqu'à ce que cette précision soit atteinte:

$$\frac{b-a}{2} \leq \Delta x$$

Si la largeur du dernier intervalle obtenu avec la méthode de la bissection est inférieure au double de la précision désirée

$$(b-a) \leq 2\,\Delta x$$

on peut arrêter les calculs et écrire la réponse finale, sinon il faut effectuer un pas supplémentaire.

Avantages et inconvénients de la méthode de la bissection

Par rapport à d'autres méthodes, la bissection présente les avantages suivants :

1. La méthode de la bissection ne nécessite que peu d'hypothèses sur la fonction *f*.
   Il suffit que la fonction *f* soit continue.
2. La méthode de la bissection est sûre : la convergence est garantie.
3. La méthode donne également une borne de l'erreur : sachant que la solution x appartient à l'intervalle [a, b], alors $\frac{a+b}{2}$ est une approximation de x à la précision $\pm\,\frac{b-a}{2}$.

Par contre, la méthode de la bissection présente les inconvénients suivants :

1. La méthode est lente. Pour atteindre une précision relative de l'ordre de 10^{-9},
   il est couramment nécessaire d'effectuer environ 30 itérations.
   Il existe d'autres méthodes plus efficaces, c'est-à-dire permettant d'atteindre
   la même précision en exigeant moins de calculs.
2. Il n'existe pas de méthode basée sur la bissection qui soit pratiquement utilisable
   pour résoudre des systèmes d'équations. C'est pourquoi il est utile de connaître aussi
   d'autres méthodes qui, plus tard, pourront s'adapter à la résolution de systèmes d'équations.
   Prochainement, nous étudierons encore la méthode de la sécante et la méthode du point
   fixe. Plus tard, nous étudierons encore la méthode de Newton.

Exercice 2-2-1

Au moyen de la méthode de la bissection, résolvez numériquement l'équation

$$2^x = 10$$

à la précision de ± 0.001
Pour les calculs, utilisez l'accessoire **Calculatrice** (sélectionnez "Affichage scientifique")
et dressez le tableau des approximations successives à la main.

Exercice 2-2-P 2

Avec les données *A* = 1000, *p* = 20, résolvez numériquement le problème 1- P 2.

Au moyen de la méthode de la bissection, calculez la valeur numérique de *q* à la précision de ± 0.02
Dressez le tableau des approximations successives à la main.
Utilisez *Mathematica* comme calculatrice. Calculez ensuite *a, b, c*.

Exercice 2-2-P 5

Avec les données *c* = 8200, *n* = 6, *a* = 2000, résolvez numériquement le problème 1-P 5.

Au moyen de la méthode de la bissection, calculez la valeur numérique du taux à la précision de ± 0.1 %.

Dressez le tableau des approximations successives à la main. Utilisez *Mathematica* comme calculatrice.

Indication: en Suisse, le taux est plafonné par la loi à 18 %.

Liens

Vers les corrigés des exercices:

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/corriges/equations/2-1_et_2-2-equations-cor.pdf

Vers la page mère:

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/index.html