

## Étude d'une fonction trigonométrique - Exercice t-06

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x)$$

Directives : faire une étude détaillée de  $f$  sur l'intervalle  $[-4\pi, 4\pi]$ , avec usage des dérivées première et seconde, à l'exception des zéros de  $f$  qui se sont pas demandés, et faire un graphique.

[Liste d'exercices corrigés: études de fonctions trigonométriques](#)

### Corrigé

$$f(-x) = \frac{(-x)}{2} - \sin(-x) = -\frac{x}{2} + \sin(x) = -f(x)$$

La fonction étant impaire, il suffit de l'étudier sur l'intervalle  $[0, 4\pi]$ .

Ensemble de définition de  $f$  :  $-\infty < x < \infty$

Ensemble de définition de  $f$  pour les tableaux de variations :  $0 \leq x \leq 4\pi$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - 2\cos(x))$$

Signe( $f'(x)$ ) :

négatif pour	$0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{3}$ ou $\frac{11\pi}{3} < x \leq 4\pi$
nul pour	$x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$ ou $x = \frac{7\pi}{3}$ ou $x = \frac{11\pi}{3}$
positif pour	$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$ ou $\frac{7\pi}{3} < x < \frac{11\pi}{3}$

négatif pour	$0 \leq x < 1.0472$ ou $5.23599 < x < 7.33038$ ou $11.5192 < x \leq 12.5664$
nul pour	$x = 1.0472$ ou $x = 5.23599$ ou $x = 7.33038$ ou $x = 11.5192$
positif pour	$1.0472 < x < 5.23599$ ou $7.33038 < x < 11.5192$

$$f''(x) = \sin(x)$$

Signe( $f''(x)$ ) :

négatif pour	$\pi < x < 2\pi$ ou $3\pi < x < 4\pi$
nul pour	$x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$ ou $x = 3\pi$ ou $x = 4\pi$
positif pour	$0 < x < \pi$ ou $2\pi < x < 3\pi$

négatif pour	$3.14159 < x < 6.28319$ ou $9.42478 < x < 12.5664$
nul pour	$x = 0$ ou $x = 3.14159$ ou $x = 6.28319$ ou $x = 9.42478$ ou $x = 12.5664$
positif pour	$0 < x < 3.14159$ ou $6.28319 < x < 9.42478$

Candidat(s) extremum(s) :

$$\left\{ \left( \frac{\pi}{3}, \frac{1}{6}(-3\sqrt{3} + \pi) \right), \left( \frac{5\pi}{3}, \frac{1}{6}(3\sqrt{3} + 5\pi) \right), \left( \frac{7\pi}{3}, \frac{1}{6}(-3\sqrt{3} + 7\pi) \right), \left( \frac{11\pi}{3}, \frac{1}{6}(3\sqrt{3} + 11\pi) \right) \right\}$$

$$= \{(1.0472, -0.342427), (5.23599, 3.48402), (7.33038, 2.79917), (11.5192, 6.62561)\}$$

Candidat(s) point(s) d'inflexion :

$$\left\{ \{0, 0\}, \left\{ \pi, \frac{\pi}{2} \right\}, \{2\pi, \pi\}, \left\{ 3\pi, \frac{3\pi}{2} \right\}, \{4\pi, 2\pi\} \right\}$$

$$= \{(0, 0), (3.14159, 1.5708), (6.28319, 3.14159), (9.42478, 4.71239), (12.5664, 6.28319)\}$$

Tableau de variations

$x$	... 0 $\pi/3$ $\pi$ $5\pi/3$ $2\pi$ $7\pi/3$ $3\pi$ $11\pi/3$ $4\pi$ ...
	<i>Fonction impaire: O(0,0) est centre de symétrie</i>
$sgn(f'(x))$	... - - 0 + + + 0 - - - 0 + + + 0 - - ...
$sgn(f''(x))$	... 0 + + + 0 - - - 0 + + + 0 - - - 0 ...
$var(f(x))$	

Relation:  $-1 \leq -\sin(x) \leq 1$  d'où  $\frac{x}{2} - 1 \leq f(x) \leq \frac{x}{2} + 1$ .

Repères graphiques (en traitillé):  $y = \frac{x}{2} + 1$ ,  $y = \frac{x}{2}$  et  $y = \frac{x}{2} - 1$ .

