

## Étude d'une fonction trigonométrique - Exercice t-05

$$f(x) = \frac{2 \cos(x) + 1}{2 + \cos(x)}$$

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions trigonométriques

### Corrigé

$$f(x + 2\pi) = \frac{2 \cos(x + 2\pi) + 1}{2 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{2 \cos(x) + 1}{2 + \cos(x)} = f(x)$$

Ainsi, la fonction  $f$  est périodique, et sa période est inférieure ou égale à  $2\pi$ . On peut donc en restreindre l'étude à l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .

$$f(-x) = \frac{2 \cos(-x) + 1}{2 + \cos(-x)} = \frac{2 \cos(x) + 1}{2 + \cos(x)} = f(x)$$

De plus, la fonction  $f$  est paire. On peut donc restreindre l'étude à l'intervalle  $[0, \pi]$ .

Ensemble de définition de  $f$  :  $-\infty < x < \infty$

Ensemble de définition de  $f$  pour les tableaux de variations :  $0 \leq x \leq \pi$

Signe( $f(x)$ ) :	négatif pour	$\frac{2\pi}{3} < x \leq \pi$
	nul pour	$x = \frac{2\pi}{3}$
	positif pour	$0 \leq x < \frac{2\pi}{3}$

Signe( $f(x)$ ) :	négatif pour	$2.0944 < x \leq 3.14159$
	nul pour	$x = 2.0944$
	positif pour	$0 \leq x < 2.0944$

$$f'(x) = -\frac{3 \sin(x)}{(2 + \cos(x))^2}$$

Signe( $f'(x)$ ) :	négatif pour	$0 < x < \pi$
	nul pour	$x = 0$ ou $x = \pi$
	positif pour	$x \in \{\}$

$$f''(x) = -\frac{3(2 \cos(x) + \cos^2(x) + 2 \sin^2(x))}{(2 + \cos(x))^3}$$

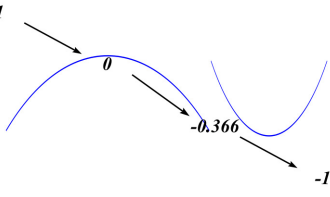
Signe( $f''(x)$ ) :	négatif pour	$0 \leq x < 2 \arctan(\sqrt{3 + 2\sqrt{3}})$
	nul pour	$x = 2 \arctan(\sqrt{3 + 2\sqrt{3}})$
	positif pour	$2 \arctan(\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}) < x \leq \pi$

Signe( $f''(x)$ ) :	négatif pour	$0 \leq x < 2.39212$
	nul pour	$x = 2.39212$
	positif pour	$2.39212 < x \leq 3.14159$

Candidat(s) extremum(s) :  $\{(0, 1), (\pi, -1)\}$

Candidat(s) point(s) d'inflexion :  $\left\{ \left( 2 \arctan \left( \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \right), \frac{1+2 \cos \left( 2 \arctan \left( \sqrt{3+2\sqrt{3}} \right) \right)}{2+\cos \left( 2 \arctan \left( \sqrt{3+2\sqrt{3}} \right) \right)} \right) \right\}$   
 $= \left\{ \left( 2 \arctan \left( \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \right), \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}) \right) \right\} = \{(2.39212, -0.366025)\}$

Tableau de variations

$x$	...	0	$2\pi/3$	2.392	$\pi$	...				
	<i>Fonction périodique, de période <math>\leq 2\pi</math></i>									
	<i>Fonction paire: <math>x=0</math> est axe de symétrie</i>									
$sgn(f(x))$	...	+	+	0	-	-	-	-	...	
$sgn(f'(x))$	...	0	-	-	-	-	-	0	...	
$sgn(f''(x))$	...	-	-	-	-	0	+	+	...	
$var(f(x))$	...									...

Graphique sur un intervalle incluant une période

