

Étude d'une fonction trigonométrique - Exercice t-04

$$f(x) = \cos(x) \cos(2x)$$

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions trigonométriques

Corrigé

$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) \cos(2(x+2\pi)) = \cos(x+2\pi) \cos(2x+4\pi) = \cos(x) \cos(2x) = f(x)$
Ainsi, la fonction f est périodique, et sa période est inférieure ou égale à 2π . On peut donc en restreindre l'étude à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

$$f(-x) = \cos(-x) \cos(2(-x)) = \cos(x) \cos(2x) = f(x)$$

De plus, la fonction f est paire. On peut donc en restreindre l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.

Ensemble de définition de f : $-\infty < x < \infty$

Ensemble de définition de f pour les tableaux de variations : $0 \leq x \leq \pi$

Signe($f(x)$) :	négatif pour	$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{4} < x \leq \pi$
	nul pour	$x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$
	positif pour	$0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$

Signe($f(x)$) :	négatif pour	$0.785398 < x < 1.5708$ ou $2.35619 < x \leq 3.14159$
	nul pour	$x = 0.785398$ ou $x = 1.5708$ ou $x = 2.35619$
	positif pour	$0 \leq x < 0.785398$ ou $1.5708 < x < 2.35619$

$$f'(x) = -\cos(2x) \sin(x) - 2 \cos(x) \sin(2x)$$

Signe($f'(x)$) :

négatif pour	$0 < x < 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (7 - 2\sqrt{6})} \right)$ ou $2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (7 + 2\sqrt{6})} \right) < x < \pi$
nul pour	$x = 0$ ou $x = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (7 - 2\sqrt{6})} \right)$ ou $x = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (7 + 2\sqrt{6})} \right)$ ou $x = \pi$
positif pour	$2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (7 - 2\sqrt{6})} \right) < x < 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (7 + 2\sqrt{6})} \right)$

négatif pour	$0 < x < 1.15026$ ou $1.99133 < x < 3.14159$
nul pour	$x = 0$ ou $x = 1.15026$ ou $x = 1.99133$ ou $x = 3.14159$
positif pour	$1.15026 < x < 1.99133$

$$f''(x) = -5 \cos(x) \cos(2x) + 4 \sin(x) \sin(2x)$$

Signe($f''(x)$) :

négatif pour	$0 \leq x < 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (31 - 6\sqrt{26})} \right)$ ou $\frac{\pi}{2} < x < 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (31 + 6\sqrt{26})} \right)$
nul pour	$x = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (31 - 6\sqrt{26})} \right)$ ou $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (31 + 6\sqrt{26})} \right)$
positif pour	$2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (31 - 6\sqrt{26})} \right) < x < \frac{\pi}{2}$ ou $2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (31 + 6\sqrt{26})} \right) < x \leq \pi$

négatif pour	$0 \leq x < 0.555121$ ou $1.5708 < x < 2.58647$
nul pour	$x = 0.555121$ ou $x = 1.5708$ ou $x = 2.58647$
positif pour	$0.555121 < x < 1.5708$ ou $2.58647 < x \leq 3.14159$

Candidat(s) extremum(s) :

$$\begin{aligned}
 & \{(0, 1), \\
 & \left(2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (7 - 2\sqrt{6})} \right), \right. \\
 & \quad \left. \cos \left(2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (7 - 2\sqrt{6})} \right) \right) \cos \left(4 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (7 - 2\sqrt{6})} \right) \right) \right), \\
 & \left(2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (7 + 2\sqrt{6})} \right), \right. \\
 & \quad \left. \cos \left(2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (7 + 2\sqrt{6})} \right) \right) \cos \left(4 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (7 + 2\sqrt{6})} \right) \right) \right), \\
 & (\pi, -1)\} \\
 & = \{(0, 1), (1.15026, -0.272166), (1.99133, 0.272166), (3.14159, -1)\}
 \end{aligned}$$

Candidat(s) point(s) d'inflexion :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (31 - 6\sqrt{26})} \right), \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \cos \left(2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (31 - 6\sqrt{26})} \right) \right) \cos \left(4 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (31 - 6\sqrt{26})} \right) \right) \right), \right. \\
 & \left. \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right), \right. \\
 & \left. \left(2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (31 + 6\sqrt{26})} \right), \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \cos \left(2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (31 + 6\sqrt{26})} \right) \right) \cos \left(4 \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{5} (31 + 6\sqrt{26})} \right) \right) \right) \right\} \\
 & = \{(0.555121, 0.377705), (1.5708, 0), (2.58647, -0.377705)\}
 \end{aligned}$$

Tableau de variations

x	... 0	0.555	$\pi/4$	1.150	$\pi/2$	1.991	$3\pi/4$	2.586	π ...												
	<i>Fonction périodique, de période $\leq 2\pi$</i>																				
	<i>Fonction paire: $x=0$ est axe de symétrie</i>																				
$sgn(f(x))$...	+	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+	0	-	-	-	-	...	
$sgn(f'(x))$...	0	-	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	...
$sgn(f''(x))$...	-	-	0	+	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	0	+	+	...		
$var(f(x))$...																				

Graphique sur un intervalle incluant une période

