

Étude d'une fonction trigonométrique - Exercice t-03

$$f(x) = \tan^2(x)\sqrt{1 - \cos(x)}$$

Directive : l'usage de la dérivée seconde n'est pas demandé.

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions trigonométriques

Corrigé

$$f(x + 2\pi) = \tan^2(x + 2\pi)\sqrt{1 - \cos(x + 2\pi)} = \tan^2(x)\sqrt{1 - \cos(x)} = f(x)$$

Ainsi, la fonction f est périodique, et sa période est inférieure ou égale à 2π . On peut donc en restreindre l'étude à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

$$f(-x) = \tan^2(-x)\sqrt{1 - \cos(-x)} = \tan^2(x)\sqrt{1 - \cos(x)} = f(x)$$

De plus, la fonction f est paire. On peut donc restreindre l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.

L'ensemble de définition de f est celui de la fonction \tan , à savoir :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Ensemble de définition de f pour les tableaux de variations : $[0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$

Signe($f(x)$) :	négatif pour	$x \in \{\}$
	nul pour	$x = 0$ ou $x = \pi$
	positif pour	$0 < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$$f'(x) = \frac{\sec^2(x) (4 - 4\cos(x) + \cos(x)\sin^2(x)) \tan(x)}{2\sqrt{1 - \cos(x)}}$$

Signe($f'(x)$) :	négatif pour	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$
	nul pour	$x = \pi$
	positif pour	$0 < x < \frac{\pi}{2}$

La dérivée de f en 0 n'est pas définie, mais $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$

Candidat(s) extremum(s) : $\{(\pi, 0)\}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty$$

Asymptotes verticales doubles $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tableau de variations

x	...	0	$\pi/2$	π	...
<i>Fonction périodique, de période $\leq 2\pi$</i>					
<i>Fonction paire: $x=0$ est axe de symétrie</i>					
$sgn(f(x))$...	0	+	+	0 ...
$sgn(f'(x))$...	0	0	-	0 ...
$var(f(x))$...	0	\nearrow	\searrow	...
			∞	∞	

Graphique sur un intervalle contenant une période

