Étude d'une fonction trigonométrique - Exercice t-02

$$f(x) = \sin(x)(1 + \cos(x))$$

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions trigonométriques

Corrigé

$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi)(1 + \cos(x + 2\pi)) = \sin(x)(1 + \cos(x)) = f(x)$$

Ainsi, la fonction f est périodique, et sa période est inférieure ou égale à 2π. On peut donc en restreindre l'étude à l'intervalle [-π, π].

$$f(-x) = \sin(-x)(1 + \cos(-x)) = (-1)\sin(x)(1 + \cos(x)) = -f(x)$$

De plus, la fonction f est impaire. On peut donc restreindre l'étude à l'intervalle [0, π].

Ensemble de définition de f : $-\infty < x < \infty$
Ensemble de définition de f pour les tableaux de variations : $0 \leq x \leq \pi$

Signe($f(x)$) :

négatif pour	$x \in \{\}$
nul pour	$x = 0$ ou $x = \pi$
positif pour	$0 < x < \pi$

$$f'(x) = \cos(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Signe($f'(x)$) :

négatif pour	$\frac{\pi}{3} < x < \pi$
nul pour	$x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \pi$
positif pour	$0 \leq x < \frac{\pi}{3}$

Signe($f'(x)$) :

négatif pour	$1.0472 < x < 3.14159$
nul pour	$x = 1.0472$ ou $x = 3.14159$
positif pour	$0 \leq x < 1.0472$

$$f''(x) = -(1 + 4\cos(x))\sin(x)$$

Signe($f''(x)$) :

négatif pour	$0 < x < \arccos\left[-\frac{1}{4}\right]$
nul pour	$x = 0$ ou $x = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ ou $x = \pi$
positif pour	$\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) < x < \pi$

Signe($f''(x)$) :

négatif pour	$0 < x < 1.82348$
nul pour	$x = 0$ ou $x = 1.82348$ ou $x = 3.14159$
positif pour	$1.82348 < x < 3.14159$

Candidat(s) extremum(s) : $\left\{\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right), (\pi, 0)\right\}$
Candidat(s) extremum(s) : $\{(1.0472, 1.29904), (3.14159, 0)\}$

Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\left\{(0, 0), \left(\arccos\left[-\frac{1}{4}\right], \frac{3\sqrt{15}}{16}\right), (\pi, 0)\right\}$
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\{(0, 0), (1.82348, 0.726184), (3.14159, 0)\}$

Tableau de variations

x	...	0		$\pi/3$		1.823		π	...
	Fonction périodique, de période $\leq 2\pi$								
	Fonction impaire: $O(0,0)$ est centre de symétrie								
$sgn(f(x))$	...	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	...
$sgn(f'(x))$	...	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	...
$sgn(f''(x))$	...	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	...
$var(f(x))$	...	0	↗	1.299	↘	0.726	↘	0	...

Graphique sur un intervalle contenant une période