

## Étude d'une fonction trigonométrique - Exercice t-02

$$f(x) = \sin(x)(1 + \cos(x))$$

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions trigonométriques

### Corrigé

$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi)(1 + \cos(x + 2\pi)) = \sin(x)(1 + \cos(x)) = f(x)$$

Ainsi, la fonction  $f$  est périodique, et sa période est inférieure ou égale à  $2\pi$ . On peut donc en restreindre l'étude à l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .

$$f(-x) = \sin(-x)(1 + \cos(-x)) = (-1)\sin(x)(1 + \cos(x)) = -f(x)$$

De plus, la fonction  $f$  est impaire. On peut donc restreindre l'étude à l'intervalle  $[0, \pi]$ .

Ensemble de définition de  $f$  :  $-\infty < x < \infty$

Ensemble de définition de  $f$  pour les tableaux de variations :  $0 \leq x \leq \pi$

|                   |              |                      |
|-------------------|--------------|----------------------|
| Signe( $f(x)$ ) : | négatif pour | $x \in \{ \}$        |
|                   | nul pour     | $x = 0$ ou $x = \pi$ |
|                   | positif pour | $0 < x < \pi$        |

$$f'(x) = \cos(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

|                    |              |                                  |
|--------------------|--------------|----------------------------------|
| Signe( $f'(x)$ ) : | négatif pour | $\frac{\pi}{3} < x < \pi$        |
|                    | nul pour     | $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \pi$ |
|                    | positif pour | $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$       |

|                    |              |                               |
|--------------------|--------------|-------------------------------|
| Signe( $f'(x)$ ) : | négatif pour | $1.0472 < x < 3.14159$        |
|                    | nul pour     | $x = 1.0472$ ou $x = 3.14159$ |
|                    | positif pour | $0 \leq x < 1.0472$           |

$$f''(x) = -(1 + 4\cos(x))\sin(x)$$

|                     |              |  |
|---------------------|--------------|--|
| Signe( $f''(x)$ ) : | négatif pour | $0 < x < \arccos\left[-\frac{1}{4}\right]$                     |
|                     | nul pour     | $x = 0$ ou $x = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ ou $x = \pi$ |
|                     | positif pour | $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) < x < \pi$                   |

|                     |              |   |
|---------------------|--------------|---|
| Signe( $f''(x)$ ) : | négatif pour | $0 < x < 1.82348$                         |
|                     | nul pour     | $x = 0$ ou $x = 1.82348$ ou $x = 3.14159$ |
|                     | positif pour | $1.82348 < x < 3.14159$                   |

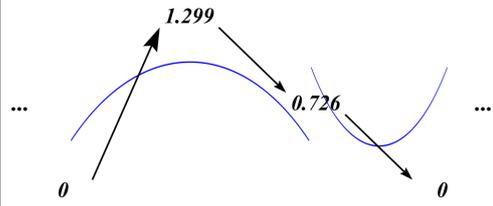
Candidat(s) extremum(s) :  $\left\{ \left( \frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4} \right), (\pi, 0) \right\}$

Candidat(s) extremum(s) :  $\{(1.0472, 1.29904), (3.14159, 0)\}$

Candidat(s) point(s) d'inflexion :  $\left\{ (0, 0), \left( \arccos\left[-\frac{1}{4}\right], \frac{3\sqrt{15}}{16} \right), (\pi, 0) \right\}$

Candidat(s) point(s) d'inflexion :  $\{(0, 0), (1.82348, 0.726184), (3.14159, 0)\}$

Tableau de variations

|               |   |  |   |         |   |       |   |       |     |     |
|---------------|---|--|---|---------|---|-------|---|-------|-----|-----|
| $x$           | ...   | 0  |   | $\pi/3$ |   | 1.823 |   | $\pi$ | ... |     |
|               | <i>Fonction périodique, de période <math>\leq 2\pi</math></i>       |  |   |         |   |       |   |       |     |     |
|               | <i>Fonction impaire: <math>O(0,0)</math> est centre de symétrie</i> |  |   |         |   |       |   |       |     |     |
| $sgn(f(x))$   | ...   | 0  | + | +       | + | +     | + | 0     | ... |     |
| $sgn(f'(x))$  | ...   | +  | + | 0       | - | -     | - | 0     | ... |     |
| $sgn(f''(x))$ | ...   | 0  | - | -       | - | 0     | + | 0     | ... |     |
| $var(f(x))$   | ...   |  |   |         |   |       |   |       |     | ... |

Graphique sur un intervalle contenant une période

