

Étude d'une fonction trigonométrique - Exercice t-01

$$f(x) = \sin(x) \sin(2x)$$

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions trigonométriques

Corrigé

$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) \sin(2(x + 2\pi)) = \sin(x + 2\pi) \sin(2x + 4\pi) = \sin(x) \sin(2x) = f(x)$$

Ainsi, la fonction f est périodique, et sa période est inférieure ou égale à 2π . On peut donc en restreindre l'étude à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

$$f(-x) = \sin(-x) \sin(2(-x)) = (-1) \sin(x) (-1) \sin(2x) = \sin(x) \sin(2x) = f(x)$$

De plus, la fonction f est paire. On peut donc en restreindre l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.

Ensemble de définition de f : $-\infty < x < \infty$

Ensemble de définition de f pour les tableaux de variations : $0 \leq x \leq \pi$

Signe($f(x)$) :	négatif pour	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$
	nul pour	$x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \pi$
	positif pour	$0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$f'(x) = 2 \cos(2x) \sin(x) + \cos(x) \sin(2x)$$

Signe($f'(x)$) :

négatif pour	$2 \arctan(\sqrt{2 - \sqrt{3}}) < x < 2 \arctan(\sqrt{2 + \sqrt{3}})$
nul pour	$x = 0$ ou $x = 2 \arctan(\sqrt{2 - \sqrt{3}})$ ou $x = 2 \arctan(\sqrt{2 + \sqrt{3}})$ ou $x = \pi$
positif pour	$0 < x < 2 \arctan(\sqrt{2 - \sqrt{3}})$ ou $2 \arctan(\sqrt{2 + \sqrt{3}}) < x < \pi$

négatif pour	$0.955317 < x < 2.18628$
nul pour	$x = 0$ ou $x = 0.955317$ ou $x = 2.18628$ ou $x = 3.14159$
positif pour	$0 < x < 0.955317$ ou $2.18628 < x < 3.14159$

$$f''(x) = 4 \cos(x) \cos(2x) - 5 \sin(x) \sin(2x)$$

Signe($f''(x)$) :

négatif pour	$2 \arctan(\sqrt{8 - 3\sqrt{7}}) < x < \frac{\pi}{2}$ ou $2 \arctan(\sqrt{8 + 3\sqrt{7}}) < x \leq \pi$
nul pour	$x = 2 \arctan(\sqrt{8 - 3\sqrt{7}})$ ou $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = 2 \arctan(\sqrt{8 + 3\sqrt{7}})$
positif pour	$0 \leq x < 2 \arctan(\sqrt{8 - 3\sqrt{7}})$ ou $\frac{\pi}{2} < x < 2 \arctan(\sqrt{8 + 3\sqrt{7}})$

négatif pour	$0.490883 < x < 1.5708$ ou $2.65071 < x \leq 3.14159$
nul pour	$x = 0.490883$ ou $x = 1.5708$ ou $x = 2.65071$
positif pour	$0 \leq x < 0.490883$ ou $1.5708 < x < 2.65071$

Candidat(s) extremum(s) :

$$\begin{aligned} & \{(0, 0), \\ & \left(2 \arctan \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right), \sin \left(2 \arctan \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right) \right) \sin \left(4 \arctan \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right) \right) \right), \\ & \left(2 \arctan \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right), \sin \left(2 \arctan \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right) \right) \sin \left(4 \arctan \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right) \right) \right), \\ & (\pi, 0)\} \\ & = \{(0, 0), (0.955317, 0.7698), (2.18628, -0.7698), (3.14159, 0)\} \end{aligned}$$

Candidat(s) point(s) d'inflexion :

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(2 \arctan \left(\sqrt{8 - 3\sqrt{7}} \right), \sin \left(2 \arctan \left(\sqrt{8 - 3\sqrt{7}} \right) \right) \sin \left(4 \arctan \left(\sqrt{8 - 3\sqrt{7}} \right) \right) \right), \right. \\ & \left. \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right), \right. \\ & \left. \left(2 \arctan \left(\sqrt{8 + 3\sqrt{7}} \right), \sin \left(2 \arctan \left(\sqrt{8 + 3\sqrt{7}} \right) \right) \sin \left(4 \arctan \left(\sqrt{8 + 3\sqrt{7}} \right) \right) \right) \right\} \\ & = \{(0.490883, 0.391963), (1.5708, 0), (2.65071, -0.391963)\} \end{aligned}$$

Tableau de variations

x	... 0	0.491	0.955	$\pi/2$	2.186	2.651	π	...							
	<i>Fonction périodique, de période $\leq 2\pi$</i>														
	<i>Fonction paire: $x=0$ est axe de symétrie</i>														
$sgn(f(x))$...	0	+	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	0	...
$sgn(f'(x))$...	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	...
$sgn(f''(x))$...	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	...
$var(f(x))$...	0	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗	↘	...

Graphique sur un intervalle contenant une période

