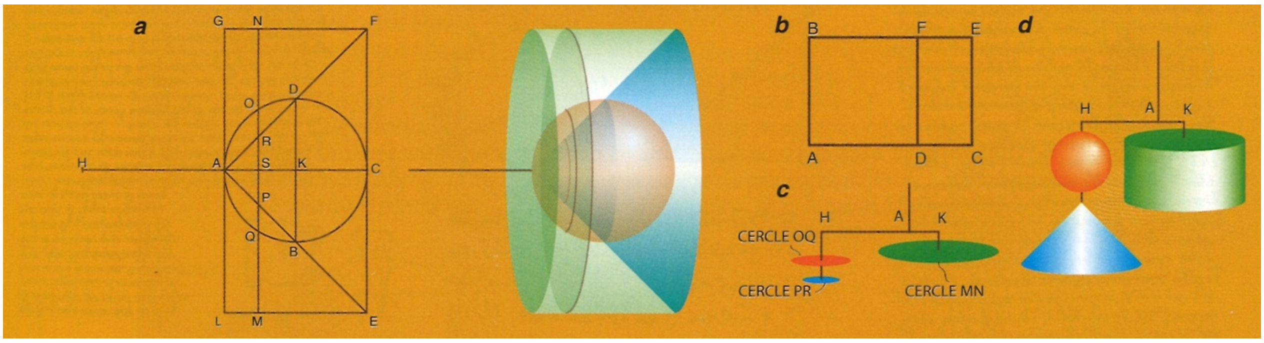
La méthode d'Archimède pour le calcul du volume de la sphère



Archimède veut démontrer que le volume de la sphère de diamètre AC est égal à $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, où *r* est le rayon de cette sphère.

On considère un plan MN perpendiculaire à AC. Archimède cherche d'abord à établir une relation entre la position AS du plan MN et les aires des cercles d'intersection de ce plan avec la sphère AC et le cône AEF.
On a les relations suivantes:

$\frac{MS}{SP} = \frac{MS \cdot MS}{MS \cdot SP}$ (1) $\qquad AQ^2 = AC \cdot AS$ (2)

$AS = SR = SP$ (3) $\qquad AC = CF = CE = AL = AG = MS$ (4)

Partons de (2) : $AQ^2 = MS \cdot SP$ et d'après le théorème de Pythagore $AQ^2 = AS^2 + SQ^2$.

D'où $AS^2 + SQ^2 = MS \cdot SP$ (5)

De (3) et (4) on déduit que $\frac{AC}{AS} = \frac{MS}{SP} = \frac{MS^2}{MS \cdot SP} = \frac{MS^2}{AS^2 + SQ^2}$

En remplaçant AS par SP et en prenant le double de chaque segment dans le membre de droite, on obtient $\frac{AC}{AS} = \frac{MN^2}{PR^2 + OQ^2}$ (6)

Cette dernière équation est équivalente à :

$$\frac{AC}{AS} = \frac{Aire(cercle\, MN)}{Aire(cercle\, PR) + Aire(cercle\, OQ)} \quad (7)$$

La mécanique entre en scène.

Archimède considère le point H symétrique du point C par rapport au plan perpendiculaire à AC et passant par A.

De (7) il obtient : $\frac{AH}{AS}=\frac{Aire(cercle\ MN)}{Aire(cercle\ PR)+Aire(cercle\ OQ)}$ (8)

Assimilons les cercles à des disques homogènes très fins disposés sur la baguette HC. Plaçons les disques PR et OQ en H. L'équation (8) nous dit qu'il y a équilibre.

Deuxième grande idée d'Archimède

La relation (8) est valable quelle que soit la position du plan MN. Archimède considère alors l'ensemble des plans MN de A à C. Tous les cercles vérifiant l'équilibre (8), cela permet d'affirmer que la sphère et le cône placés en H équilibrent le cylindre EFGL dont le centre de gravité est placé en K, centre de la sphère. Dès lors, si V_1 est le volume du cône AEF, V_2 le volume du cylindre LEFG et V celui de la sphère de diamètre AC, on a :

$$V_2=2V_1+2V \quad \text{, car} \quad AH=2AK$$

$$V=\frac{1}{2}V_2-V_1=\frac{1}{2}\pi(2r)^2\cdot 2r-\frac{1}{3}\pi(2r)^2\cdot 2r=\frac{4}{3}\pi r^3$$

Eugène Pasquier