Démonstration de « $\sqrt{n}$ est irrationnel si n n'est pas un carré »

Un exemple de démonstration par contraposition

Proposition

Pour tout entier positif n qui n'est pas un carré, si $c = \sqrt{n}$, alors c est irrationnel.

Forme contraposée de la proposition

Pour tout entier positif n qui n'est pas un carré, si c est rationnel, alors $c \neq \sqrt{n}$.

Reformulation

Si c est rationnel, alors $c = \frac{a}{b}$ où a, b sont des entiers positifs. Pour tout entier positif n qui n'est pas un carré, il faut montrer que $\frac{a}{b} \neq \sqrt{n}$ ou que $a \neq \sqrt{n}\,b$. Pour ce faire, il suffit de démontrer le lemme suivant.

Lemme

Pour tout entier positif n qui n'est pas un carré, $a^2 \neq nb^2$ quels que soient les entiers positifs a, b.

Démonstration du lemme

Si, dans la décomposition en facteurs premiers de l'entier positif n, tous les exposants sont pairs, alors n est un carré. Donc, si n n'est pas un carré, la décomposition de n en facteurs premiers contient au moins un facteur dont l'exposant est impair. Mettons un tel facteur en évidence :

$$n = p^{2q+1} n_1$$

où p est premier, $2q + 1$ est l'exposant impair et n_1 est un facteur qui n'est pas divisible par p. (Exemple numérique : $n = 20$, $p = 5$, $2q + 1 = 1$, $n_1 = 4$)

En divisant itérativement a par p, on obtient

$$a = p^k a_1$$

où k est un entier non négatif et a_1 un entier positif non divisible par p. Il s'ensuit que

$$a^2 = p^{2k} a_1^2$$

où l'exposant de p est pair et a_1^2 est un entier positif non divisible par p.

En procédant de même pour b, on obtient

$$b = p^m b_1$$

où m est un entier non négatif et b_1 un entier positif non divisible par p. Il s'ensuit que

$$nb^2 = p^{2(q+m)+1} n_1 b_1^2$$

où l'exposant de p est impair et $n_1 b_1^2$ est un entier positif non divisible par p .

Comme la décomposition en facteurs premiers est unique, en comparant les exposants de p, on conclut que a^2 et nb^2 sont distincts.

Marcel Délèze

Cas particulier $n = 2$ avec démonstration par l'absurde

www.deleze.name/marcel/culture/Racine_de_2_est_irrationnel/racine-de-2-est-irrationnel.pdf

Prolongement : Le développement décimal de tout nombre irrationnel est illimité et non périodique

www.deleze.name/marcel/culture/DeveloppementDecimal/DeveloppementDecimal.pdf

Lien vers la page mère : Mathématiques dans la culture générale

www.deleze.name/marcel/culture/index.html