Probabilités, corrigé de l'exercice 1-14

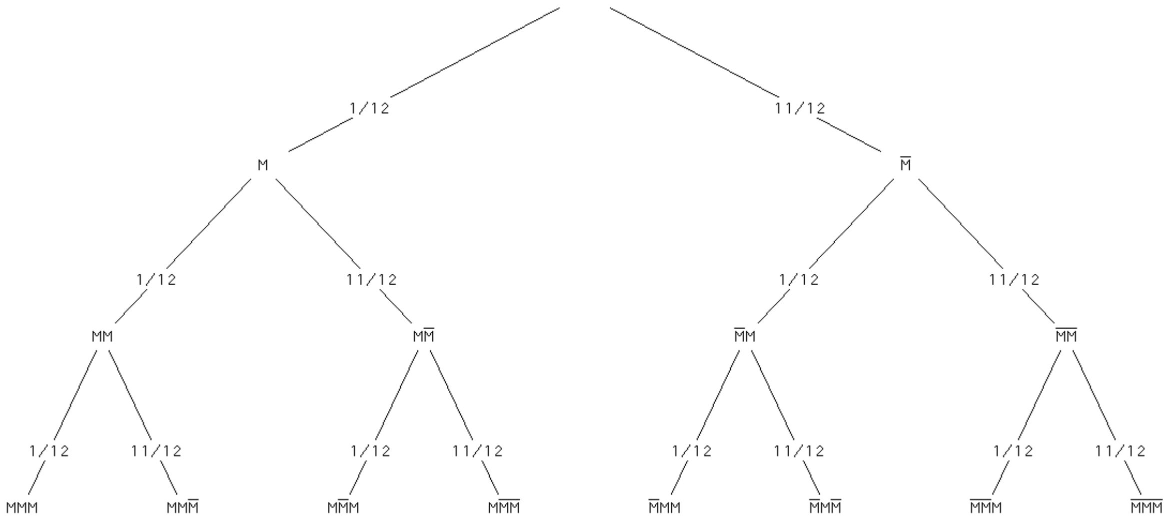
Pour raisonner, nous distinguerons les « *groupes de personnes sans tenir compte de l'ordre* » des « *listes ordonnées de personnes* ».

Notations :

M = événement « *la personne est née en mai* » ;

$M\overline{M}$ = « *le première personne est née en mai* **et** *la deuxième n'est pas née en mai* ».

L'arbre comporte 12 niveaux dont voici les trois premiers :



Partie a)

Préparation : considérons d'abord la question suivante qui est plus facile à illustrer : « Pour un groupe de 3 personnes, calculer la probabilité qu'exactement 1 personne soit née en mai » :

$$P\{1\ M \text{ et } 2\ \overline{M}\} = P(M\overline{M}\overline{M}) + P(\overline{M}M\overline{M}) + P(\overline{M}\overline{M}M) = 3\ P(M\overline{M}\overline{M})$$

Le facteur 3 qui exprime le lien entre « *groupes de personnes dans n'importe quel ordre* » et « *listes ordonnées de personnes* » est un coefficient binomial.

Pour un groupe de 12 personnes, la probabilité qu'exactement 3 personnes soient nées en mai est :

$$P\{3M\ et\, 9\overline{M}\} \ = \ \binom{12}{3}\times P(M\ M\ M\ \overline{M}\,\overline{M}\,\overline{M}\,\overline{M}\,\overline{M}\,\overline{M}\,\overline{M}\,\overline{M}\,\overline{M})$$

$$P\{3M\ et\, 9\overline{M}\} \ = \ 220\times\left(\frac{1}{12}\right)^3\times\left(\frac{11}{12}\right)^9 \ = \ 0.0581811$$

Partie b)

$$P\{nombre(M)\geq 3\} \ = \ P\{3M\ et\ 9\overline{M}\} \ + \ P\{4M\ et\ 8\overline{M}\} \ + \ \ldots$$

Les événements « *nombre(M)* $\geq$ *3* » et « *nombre(M)* $<$ *3* » sont complémentaires :

$$P\{nombre(M)< 3\} \ = \ P\{12\overline{M}\} \ + \ P\{1M\ et\ 11\overline{M}\} \ + \ P\{2M\ et\ 10\overline{M}\}$$

$$P\{nombre(M)\geq 3\} \ = \ 1 \ - \ \left(\frac{11}{12}\right)^{12} \ - \ \binom{12}{1}\times\left(\frac{1}{12}\right)^{1}\times\left(\frac{11}{12}\right)^{11} \ - \ \binom{12}{2}\times\left(\frac{1}{12}\right)^{2}\times\left(\frac{11}{12}\right)^{10} \ = \ 0.07201$$

Partie c)

Les événements « *nombre(M)* $\geq$ *1 sur n personnes* » et « *tous* $\overline{M}$ *sur n personnes* » sont complémentaires :

$$P\{nombre(M)\geq 1\, sur\ n\ personnes\} \ = \ 1 \ - \ \left(\frac{11}{12}\right)^{n} \ > \ 0.99$$

c'est-à-dire qu'il faut résoudre l'inéquation $(11/12)^n < 0.01$

Avec les logarithmes :

$\ln((11/12)^n) < \ln(0.01)$

$n*\ln(11/12) < \ln(0.01)$

$n > \ln(0.01)/\ln(11/12)$ Remarque : $\ln(11/12) < 0$

$n > 52.926$ Remarque : n est entier

$\boldsymbol{n \geq 53}$

Outil en ligne pour dessiner un arbre de probabilités composées :

https://www.deleze.name/marcel/sec2/prob/calculateur/index.html

Probabilités, énoncés des exercices :

https://www.deleze.name/marcel/sec2/prob/1/exercices-1.pdf