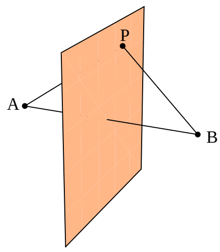
- **Enoncés des exercices "a3- Produit scalaire dans l'espace"**

  http : // www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/a3/a3-produitscalaire.php

a3 - Produit scalaire (géométrie analytique dans l'espace)

- **Corrigé de l'exercice 1**

a) L'ensemble des points équidistants de A et B forme un plan appelé plan médiateur du segment AB.



L'ensemble cherché est l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec le plan médiateur du segment AB. Vu que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \neq 0$$

la droite et la plan médiateur sont sécants. Il y a donc un et un seul point d'intersection.

b) Equations de la droite $\mathcal{D}$

$$x = 3\,t, \quad y = -2 + 5\,t, \quad z = 5$$

Equation du plan médiateur du segment AB

$$(x+1)^2 + y^2 + (z-9)^2 = (x-6)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2$$

$$14\,x - 6\,y - 14\,z + 33 = 0$$

Intersection de la droite et du plan

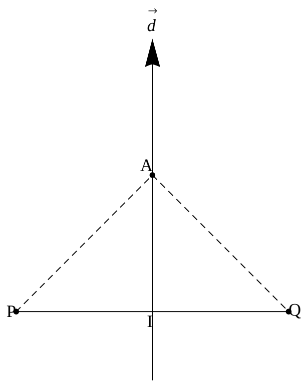
$$14\,(3\,t) - 6\,(-2 + 5\,t) - 14\,(5) + 33 = 0$$

$$t = \frac{25}{12}$$

$$x = \frac{25}{4}, \quad y = \frac{101}{12}, \quad z = 5$$

- **Corrigé de l'exercice 2**

Notons $I(x,\ y,\ z)$ la projection orthogonale de P sur $\mathcal{D}$.
Schéma dans le plan qui contient la droite $\mathcal{D}$ et le point P:



Le vecteur $\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \\ z+5 \end{pmatrix}$ est la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sur la direction de $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \\ z+5 \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{d}}{\vec{d} \cdot \vec{d}} \vec{d} = \frac{-9}{14} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad I\left(-\frac{5}{14}, \frac{15}{14}, -\frac{26}{7}\right)$$

Notons $Q(x, y, z)$. On a $\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{PI}$:

$$\begin{pmatrix} x+\frac{5}{14} \\ y-\frac{15}{14} \\ z+\frac{26}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{14}-3 \\ \frac{15}{14}-4 \\ -\frac{26}{7}+1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \quad Q\left(-\frac{26}{7}, -\frac{13}{7}, -\frac{45}{7}\right)$$

- **Corrigé de l'exercice 3**

a) L'équation du plan α qui passe par A et est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ est

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{d} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-5 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha: \quad -2x+5y+2z-23 = 0$$

b) Notons φ l'angle (non obtus) entre la droite $\mathcal{D}$ et le vecteur normal du plan β

$$\cos(\varphi) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(2^2+5^2+2^2)} \sqrt{(3^2+1^2+2^2)}} \quad \Longrightarrow \quad \varphi \simeq 70.9939\,°$$

L'angle entre la droite $\mathcal{D}$ et le plan β est le complément du précédent:

$$\delta = 90\,° - \varphi \simeq 19.0061\,°$$

- **Corrigé de l'exercice 4 a)**

$\text{dist}(P, m) = 6$ et $P(x, y, z) \in i$

$$\frac{|2x-y+3z-5|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}} = 6 \quad \text{et} \quad (x = 1+t, \ \ y = -t \ \ \text{et} \ \ z = 1+2t)$$

$$\frac{|2(1+t)-(-t)+3(1+2t)-5|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}} = 6$$

et $(x = 1 + t,\ y = -t$ et $z = 1 + 2t)$

$\dfrac{|9t|}{\sqrt{14}} = 6$ et $(x = 1 + t,\ y = -t$ et $z = 1 + 2t)$

$|t| = \dfrac{6\sqrt{14}}{9}$ et $(x = 1 + t,\ y = -t$ et $z = 1 + 2t)$

$t = \pm\dfrac{2\sqrt{14}}{3}$ et $(x = 1 + t,\ y = -t$ et $z = 1 + 2t)$

On a deux solutions :

$$\boxed{\begin{array}{l} P_1\left(1 + \dfrac{2\sqrt{14}}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{14}}{3},\ 1 + \dfrac{4\sqrt{14}}{3}\right) \approx P_1(3.494,\ -2.494,\ 5.989) \\ P_2\left(1 - \dfrac{2\sqrt{14}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{14}}{3},\ 1 - \dfrac{4\sqrt{14}}{3}\right) \approx P_2(-1.494,\ 2.494,\ -3.989) \end{array}}$$

- **Corrigé de l'exercice 4 b)**

Point d'intersection $A(x, y, z) \in m$ et $A(x, y, z) \in i$

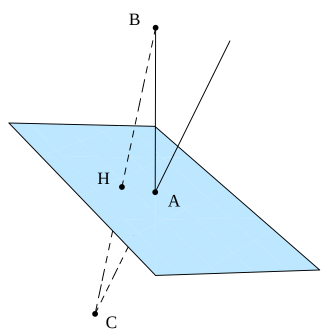
$2x - y + 3z - 5 = 0$ et $(x = 1 + t,\ y = -t$ et $z = 1 + 2t)$

$2(1 + t) - (-t) + 3(1 + 2t) - 5 = 0$ et $(x = 1 + t,\ y = -t$ et $z = 1 + 2t)$

$9t = 0$ et $(x = 1 + t,\ y = -t$ et $z = 1 + 2t)$

$t = 0$ et $(x = 1 + t,\ y = -t$ et $z = 1 + 2t)$

$A(1, 0, 1)$



Méthode : choisissons un point $B \in i$, $B \neq A$
calculons la projection orthogonale H de B sur m
calculons le symétrique C de B par rapport à m
le rayon réfléchi est la droite CA

Choix du point B

$t = 1$ et $(x = 1 + t,\ y = -t$ et $z = 1 + 2t)$

$B(2, -1, 3)$

Perpendiculaire à m par B (un vecteur directeur de la perpendiculaire est un vecteur normal du plan)

$x = 2 + 2r,\ y = -1 - r,\ z = 3 + 3r$

Point H = intersection de la perpendiculaire et du plan m

$$2\,(2+2\,r)-(-1-r)+3\,(3+3\,r)-5=0$$

$$14\,r+9=0 \qquad\Longrightarrow\qquad r=-\frac{9}{14}$$

$$H\left(2+2\left(-\frac{9}{14}\right),\ -1-\left(-\frac{9}{14}\right),\ 3+3\left(-\frac{9}{14}\right)\right)=H\left(\frac{5}{7},\ -\frac{5}{14},\ \frac{15}{14}\right)$$

Point C tel que $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{HC}$

$$\begin{pmatrix}\frac{5}{7}-2\\ -\frac{5}{14}+1\\ \frac{15}{14}-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-\frac{5}{7}\\ y+\frac{5}{14}\\ z-\frac{15}{14}\end{pmatrix} \qquad\Longrightarrow\qquad C\left(-\frac{4}{7},\ \frac{2}{7},\ -\frac{6}{7}\right)$$

Rayon réféchi = droite CA

$$\overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}1+\frac{4}{7}\\ 0-\frac{2}{7}\\ 1+\frac{6}{7}\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}11\\ -2\\ 13\end{pmatrix}$$

$$\boxed{x=1+11\,s,\quad y=-2\,s,\quad z=1+13\,s}$$

- **Corrigé de l'exercice 5**

Méthode : Soit $P\in d_1$ qui dépend du paramètre t et $Q\in d_2$ qui dépend du paramètre u.
On cherche t, u tels que $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{d_1}=0$ et $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{d_2}=0$

Calculs :

$$P\,(1+3\,t,\ -2\,t,\ -2-t) \qquad\qquad Q\,(-u-2,\ 3\,u+4,\ 4\,u+2)$$

$$\overrightarrow{d_1}=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ -1\end{pmatrix} \qquad\qquad \overrightarrow{d_2}=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-u-3\,t-3\\ 3\,u+2\,t+4\\ 4\,u+t+4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ}.\ \overrightarrow{d_1}=(-u-3\,t-3)\,3+(3\,u+2\,t+4)\,(-2)+(4\,u+t+4)\,(-1)=-13\,u-14\,t-21$$

$$\overrightarrow{PQ}.\ \overrightarrow{d_2}=(-u-3\,t-3)\,(-1)+(3\,u+2\,t+4)\,3+(4\,u+t+4)\,4=26\,u+13\,t+31$$

$$\begin{array}{ll}13\,u+14\,t+21=0 & \mid\times 2\\ 26\,u+13\,t+31=0 & \mid\times(-1)\end{array} \qquad\Longrightarrow\qquad 15\,t+11=0$$

$$t=-\frac{11}{15} \qquad\qquad u=\frac{-14\,t-21}{13}=-\frac{161}{195}$$

La perpendiculaire commune est la droite PQ:

$$P\left(-\frac{6}{5},\ \frac{22}{15},\ -\frac{19}{15}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-u-3\,t-3\\ 3\,u+2\,t+4\\ 4\,u+t+4\end{pmatrix}=\frac{1}{195}\begin{pmatrix}5\\ 11\\ -7\end{pmatrix}$$

$$\boxed{x=-\frac{6}{5}+5\,v,\quad y=\frac{22}{15}+11\,v,\quad z=-\frac{19}{15}-7\,v}$$

- **Lien vers la page mère: "Exercices corrigés"**

[http : // www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/](http://www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/)