- **Enoncés des exercices "a3- Plans et droites dans l'espace"**

http : // www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/a3/a3-plans.php

a3 - Plans et droites (géométrie analytique dans l'espace)

Corrigé de l'exercice 1

a) Un système d'équations paramétriques du plan *p*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 3r - 2s \\ 6 - r - 2s \\ 7 + r - 7s \end{pmatrix}$$

b) Equation cartésienne du plan *p*

$$\begin{pmatrix} 3r - 2s \\ -r - 2s \\ r - 7s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 6 \\ z - 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \cdot 1 & \\ \cdot 3 & \cdot 1 \\ & \cdot 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3r - 2s \\ -8s \\ -9s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ x + 3y - 17 \\ y + z - 13 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ \cdot 9 \\ \cdot (-8) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3r - 2s \\ -8s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ x + 3y - 17 \\ 9x + 19y - 8z - 49 \end{pmatrix}$$

Equation cartésienne du plan *p*: $9x + 19y - 8z - 49 = 0$

c) Intersection de ce plan *p* avec la droite *d*

$$9(-1 + t) + 19(1 - t) - 8(2t) - 49 = 0$$

$$-26t - 39 = 0 \qquad t = -\frac{39}{26} = -\frac{3}{2}$$

$$x = -1 + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2}; \quad y = 1 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}; \quad z = 2\left(-\frac{3}{2}\right) = -3; \quad \text{Point } \left(-\frac{5}{2};\ \frac{5}{2};\ -3\right)$$

Corrigé de l'exercice 2

a) Un système paramétrique de la doite d_1

$$t = x - 3 = \frac{y - 7}{-2} = \frac{z + 9}{5}$$

$$x = 3 + t; \quad y = 7 - 2t; \quad z = -9 + 5t$$

d_1 passe par $A_1\,(3;\ 7;\ -9)$ et est dirigée par $\overrightarrow{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

d_2 passe par $A_2\,(7;\ 10;\ -10)$ et est dirigée par $\overrightarrow{d_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

Montrons que $\left(\overrightarrow{d_1},\ \overrightarrow{d_2},\ \overrightarrow{A_1 A_2}\right)$ est un système linéairement dépendant:

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \cdot 2 & \cdot 5 \\ \cdot 1 & \\ & \cdot (-1) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\,s \\ 11\,s \\ 21\,s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\,t \\ 11\,t \\ 21\,t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} r + 3\,s + 4\,t = 0 \\ \quad s + t = 0 \end{cases}$$

Le système possède une solution non nulle, donc les deux droites sont coplanaires. ■

b) Les deux droites n'étant pas parallèles, leur plan commun est défini par le repère $\left(A_1,\ \overrightarrow{d_1},\ \overrightarrow{d_2}\right)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

■ **Corrigé de l'exercice 3 a)**

$$\overrightarrow{A_1\,B_1} = \begin{pmatrix} 5-0 \\ -1+2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} r = \begin{pmatrix} 5\,r \\ r-2 \\ -r+3 \end{pmatrix}$$

$$d_1 : \frac{x-0}{5} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

■ **Corrigé de l'exercice 3 b)**

Equation du plan p_1 qui contient la droite d_1 et le point P

$$\overrightarrow{A_1\,P} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 0+2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} 5\,r + 3\,s \\ r + 2\,s - 2 \\ -r + s + 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} x \\ y+2 \\ z-3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} x \\ -x + 5\,y + 10 \\ x + 5\,z - 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} x \\ -x + 5\,y + 10 \\ 15\,x - 40\,y + 35\,z - 185 \end{pmatrix}$$

$$p_1 : 3\,x - 8\,y + 7\,z - 37 = 0$$

Equation du plan p_2 qui contient la droite d_2 et le point P

$$\overrightarrow{A_2\,B_2} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 6-3 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A_2\,P} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0-3 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$p_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} -3\,t + u + 2 \\ 3\,t - 3\,u + 3 \\ -t + 3\,u + 1 \end{pmatrix}$$

$$p_2 : 3\,x + 4\,y + 3\,z - 21 = 0$$

Equation de la droite d

$$d : \begin{cases} 3x - 8y + 7z - 37 = 0 \\ 3x + 4y + 3z - 21 = 0 \end{cases}$$

- **Corrigé de l'exercice 4, avec détour par un système cartésien**

Forme cartésienne de p_2:

$$x - 2y + 1 = 0$$

Calcul de l'intersection des deux plans

$$\begin{cases} x - 2y \qquad + 1 = 0 \\ \quad 7y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

Choix $y = t$ d'où $z = 7t - 4$ et $x = 2t - 1$

$$d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - 1 \\ t \\ 7t - 4 \end{pmatrix}$$

$$d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} t$$

- **Corrigé de l'exercice 4, méthode paramétrique directe**

Dans $7y - z - 4 = 0$, substituons $x = -1 + 2r$, $y = r$, $z = s$

$$7r - s - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad s = 7r - 4$$

$$d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2r \\ r \\ 7r - 4 \end{pmatrix}$$

$$d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} r$$

- **Corrigé de l'exercice 5**

Les deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont linéairement dépendants

$$\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m - 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 - m \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

A la dernière ligne, soustrayons l'avant dernière:

$$-1 = t$$

Remplaçons dans le système d'équations:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + m \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$m = 3$$

- **Corrigé de l'exercice 5, méthode linéaire**

Les deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont linéairement dépendants $\Longleftrightarrow$ le système d'équations suivant possède au moins une solutions non nulle $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m - 1 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} 2 - m \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m-1 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} 2-m \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réduction à la forme triangulaire $m * (\text{ligne } 1) - 1 * (\text{ligne } 2)$
$(m-1) * (\text{ligne } 1) - 1 * (\text{ligne } 3)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ m * 1 - m \\ (m-1) * 1 - (m-1) \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} 2-m \\ m(2-m)+3 \\ (m-1)*(2-m)+2 \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} 2-m \\ -m^2+2m+3 \\ -m^2+3m \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système précédent possède au moins une solution si et seulement si *m* satisfait le système suivant:

$$\begin{cases} -m^2+2m+3=0 \\ -m^2+3m=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(m+1)(m-3)=0 \\ m(m-3)=0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est

$m = 3$

- **Lien vers la page mère: "Exercices corrigés"**

  [http : // www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/](http://www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/)