

Exercices de base

§ 3 Fonctions logarithmiques

□ Liens hypertextes

Cours correspondant de niveau standard:

http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Logarithmes/Log-Cours_standard.pdf

Cours correspondant de niveau avancé:

http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Logarithmes/Log-Cours_avance.pdf

Supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II (page mère):

<http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/index.html>

■ § 3.1 Notion de logarithme

□ Exercice 3-1

Sans utiliser la calculatrice, déterminez la valeur exacte des logarithmes suivants.

Au besoin, introduisez des moyens dans les suites géométrique et arithmétique appropriées.

$$\begin{aligned} & \log_2(2), \quad \log_2(32), \quad \log_2\left(\frac{1}{2}\right), \quad \log_2\left(\frac{1}{16}\right), \\ & \log_3(81), \quad \log_5\left(\frac{1}{125}\right), \quad \log_{\sqrt{5}}(5), \quad \log(1000), \\ & \log(0.01), \quad \log_2(\sqrt{2}), \quad \log_3(9), \quad \log_{27}\left(\frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

□ Exercice 3-2

Dans une solution dont le pH augmente de 1, comment évolue la concentration des ions H^+ ?

■ § 3.2 Fonctions réciproques (cas particulier)

□ Exercice 3-3

Dans un même graphique, dessinez $x \mapsto 3^x$ et $x \mapsto \log_3(x)$.

Calculez $\log_3(x)$ pour $x = \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, \sqrt{3}, 3, \sqrt{27}, 9$.

Calculez $\log_3(3^x)$ et $3^{\log_3(x)}$.

□ Exercice 3-4

En calculant sur votre calculatrice quelques valeurs de la fonction $x \mapsto e^x$, dessinez le graphique du logarithme naturel

$$x \mapsto \ln(x)$$

■ § 3.4 Propriétés du logarithme

□ Exercice 3-5

Récrivez les propriétés du logarithme (voir Cours § 3.4) pour le cas particulier du logarithme naturel.

□ Exercice 3-6 (par oral)

a) Avec votre calculatrice, essayez de calculer

$$\begin{array}{cccc} e^{-1} & \ln(-1) & \ln(e^\pi) & e^{\ln(\pi)} \\ e^{1200} & e^{-1200} & \ln(e^{1200}) & \ln(e^{-1200}) \end{array}$$

puis expliquez et commentez les résultats obtenus.

b) En contournant la difficulté, comment peut-on calculer $\ln(e^{1200})$ et $\ln(e^{-1200})$?

□ Exercice 3-7

a) Faites apparaître $\ln(x)$ dans les expressions suivantes (sous l'hypothèse $x > 0$)

$$\begin{array}{ccc} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) & \ln(x^2) & \ln(3 \cdot x) \\ \ln\left(\sqrt[3]{\frac{x}{27}}\right) & & \end{array}$$

b) Sous l'hypothèse $x > 0$, mettez les expressions suivantes sous la forme $\ln(u(x))$

$$\ln(x) + \ln(3) \qquad \ln(x+2) + 5 \qquad \frac{1}{2} \cdot \ln(3 \cdot x) - 2 \cdot \ln(x) + 1$$

□ Exercice 3-8

Sans utiliser de calculatrice, déterminez la valeur exacte de

$$\log_5\left(\sqrt[3]{5^2}\right) \qquad \log_5(0.04) \qquad \log_4(2) \qquad \log_5\left(\frac{1}{125}\right)$$

□ Exercice 3-9

Exprimez les nombres suivants en fonction de $\log(2)$ et $\log(3)$, puis, sachant que $\log(2) \simeq 0.30103$ et $\log(3) \simeq 0.47712$, calculez la valeur numérique de l'expression

$$\begin{array}{cccc} \log(4), & \log(0.75), & \log(6), & \log(8), \\ \log(12), & \log(4.5), & \log(16), & \log(9), \\ \log(\sqrt{2}), & \log(\sqrt{3}), & \log(\sqrt[3]{2}), & \log(\sqrt[3]{6}) \end{array}$$

□ Exercice 3-10

Sans utiliser la calculatrice, déterminez

$$\begin{aligned} a &= \log_5(50) + \log_5(0.2) + \log_5(2.5) \\ b &= \log_3(\sqrt[3]{3}) + \log_3(27) + \log_3\left(\frac{5}{3}\right) + \log_3\left(\frac{8}{5}\right) + \log_3\left(\left(\frac{9}{2}\right)^3\right) \end{aligned}$$

□ Exercice 3-11

Simplifiez les expressions suivantes:

$$\begin{array}{lll}
 10^{3 \cdot \log(2)} & \log(\sqrt{10}) & \log\left(10^{\frac{1}{3}}\right) \\
 10^{-2 \cdot \log(3)} & \log\left(10^{-\frac{1}{2}}\right) & \log(\sqrt[3]{10})
 \end{array}$$

■ § 3.6 Changements de base

□ Exercice 3-12

A l'aide de la calculatrice, déterminez la valeur numérique de

$$\begin{array}{ll}
 \log_3(2) & \log_9(\sqrt{2}) \\
 \log_5(6) & \log_{\frac{1}{2}}(1.04^6)
 \end{array}$$

□ Exercice 3-13

Dans un livre d'informatique, on a trouvé la formule

$$n \mapsto d(n) = k n \log_2(n) \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$

- Récrivez cette formule en utilisant le logarithme décimal.
- Récrivez cette formule en utilisant le logarithme naturel.

□ Exercice 3-14

La radioactivité du plutonium 238 diminue de moitié en $T = 86$ ans.Ce temps T est appelé "demi-vie" ou "pseudo-période".

Dans le phénomène de la radioactivité, le taux de décroissance est constant.

Ecrivez la loi sous la forme $A(t) = A_0 r^t$, donnez la valeur numérique de r et calculez le taux annuel de décroissance.Exercices facultatifs de renforcement

□ Exercice 3-15

$$\begin{array}{llll}
 \log(\sqrt{1000}), & \log_2(4), & \log_2(\sqrt{8}), & \ln(1), \\
 \ln(e), & \ln\left(\frac{1}{e}\right), & \ln\left(\frac{1}{e^2}\right), & \ln(e^3), \\
 \ln(e^n), & \ln(\sqrt{e}), & \log(10), & \log(10^6).
 \end{array}$$

□ Exercice 3-16

Dans un même graphique, dessinez $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$ et $x \mapsto \log_{\frac{1}{3}}(x)$.

□ Exercice 3-17

Récrivez les propriétés du logarithme dans le cas particulier du logarithme décimal.

□ Exercice 3-18

a) Faites apparaître $\log(x)$ dans les expressions suivantes :

$$\log(5 \cdot x^2) \qquad \log\left(\frac{\pi}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \qquad \log\left(\frac{6}{x}\right)$$

b) Mettez les expressions suivantes sous la forme $\log(u(x))$:

$$\log(x-1)-\pi \qquad \log(x)+\log(2 \cdot x)-\log(3 \cdot x) \qquad 2 \cdot \log(3 \cdot x)$$

□ Exercice 3-19

Sans utiliser de calculatrice, déterminez la valeur exacte de

$$\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{9}\right) \qquad \log_3\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \qquad \log_4(0.25) \qquad \log_9(3)$$

□ Exercice 3-20

Sans utiliser la calculatrice, déterminez

$$c = \log_7(0.7) + \log_7(49) + \log_7(\sqrt{7}) + \log_7(10)$$

$$d = \log(7 + 5\sqrt{2}) + 8 \log(\sqrt{2} + 1) + 7 \log(\sqrt{2} - 1) + 2 \log(3 - 2\sqrt{2})$$

□ Exercice 3-21

A l'aide de la calculatrice, déterminez la valeur numérique de

$$\log_2(3) \qquad \log_7(3.5^{1.5})$$

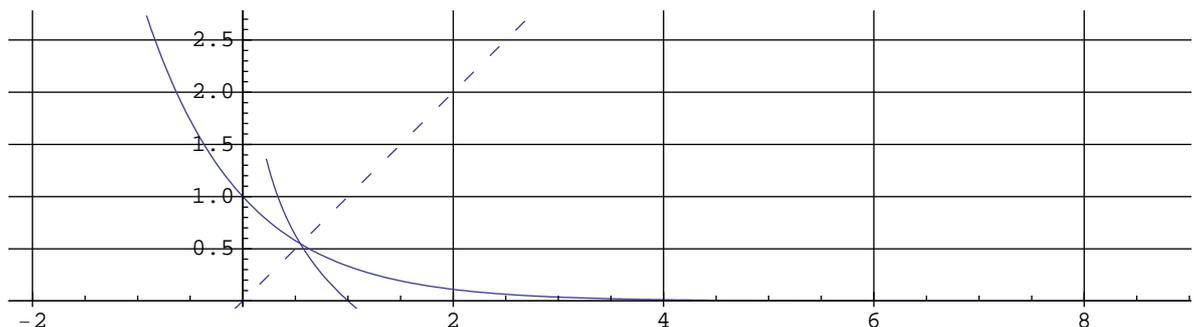
$$\log_6(5) \qquad \log_4(\sqrt[3]{5^2})$$

Réponses de certains exercices de renforcement

□ Réponses de l'exercice 3-15

$$\begin{array}{cccc} \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ n & \frac{1}{2} & 1 & 6 \end{array}$$

□ Réponse de l'exercice 3-16



Réponses de l'exercice 3-17

$$\log (1) = 0$$

$$\log (10) = 1$$

$$\log (10^x) = x$$

$$10^{\log (y)} = y$$

$$\log (x y) = \log (x) + \log (y)$$

$$\log \left(\frac{1}{x} \right) = -\log (x)$$

$$\log \left(\frac{x}{y} \right) = \log (x) - \log (y)$$

$$\log (x^n) = n \log (x)$$

□ Réponses de l'exercice 3-18

□ a)

$$\log (5) + 2 \log (x)$$

$$\log (\pi) - \frac{2}{3} \log (x)$$

$$\log (6) - \log (x)$$

□ b)

$$\log \left(\frac{x-1}{10^\pi} \right)$$

$$\log \left(\frac{2x}{3} \right)$$

$$\log (9x^2)$$

□ Réponses de l'exercice 3-19

$$2$$

$$\frac{-1}{4}$$

$$4$$

$$-1$$

$$\frac{1}{2}$$

$$2$$

□ Réponses de l'exercice 3-20

$$c = \frac{7}{2}$$

$$d = 0$$

□ Réponses de l'exercice 3-21

$$0.63093 \quad 0.965689$$

$$0.898244 \quad 0.773976$$

Exercices supplémentaires pour le niveau avancé

□ Exercice 3-22

Représenter graphiquement les fonctions suivantes.

En choisissant au mieux les ensembles de définition et d'arrivée, quelles fonctions sont-elles inversibles?

Pour les fonctions bijectives, calculez la fonction réciproque.

$$(1) \quad f(x) = 3x - 5$$

$$(2) \quad f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{x+1}$$

□ [Renforcement pour niveau avancé] Exercice 3-23

Même exercice

$$(1) \quad f(x) = ax + b \quad (\text{discuter})$$

$$(2) \quad f(x) = |x|$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{x} + 1$$

□ Exercice 3-24

Considérons un nombre réel positif x écrit en notation scientifique $x = m \cdot 10^n$

où $m \in [1; 10[$ (partie mantisse)

et $n \in \mathbb{Z}$ (partie exposant).

a) Exprimez $\log(x)$ en fonction de n et $\log(m)$.

Quel est l'ensemble des valeurs de $\log(m)$?

b) La propriété précédente a permis de réaliser des tables de logarithmes décimaux :

il suffit de disposer d'une table des logarithmes de nombres compris entre 1 et 10.

C'est ainsi que l'on calculait les logarithmes avant l'apparition des calculatrices.

Pour expliquer comment on utilisait ces tables, nous utiliserons une calculatrice mais en

limitant son usage au calcul du logarithme de la partie mantisse. Calculez de cette manière

| | | | |
|-------------|------------------------|---------------|---------------------------|
| $\log(7.1)$ | $\log(3.2)$ | $\log(2.7)$ | $\log(8.4)$ |
| $\log(710)$ | $\log(3.2 \cdot 10^5)$ | $\log(0.027)$ | $\log(8.4 \cdot 10^{-6})$ |

□ Exercice 3-25

Note historique

Au XVII-ème siècle, faire des calculs scientifiques était une tâche longue et ingrate. Les logarithmes ont été introduits pour faciliter les calculs numériques. Montrons-le par un exemple.

Soit à calculer le rayon r d'une sphère de volume $V=60$ c'est-à-dire $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

Calculons d'abord le logarithme de r :

$$\log(r) = \log\left(\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \log\left(\frac{3V}{4\pi}\right) = \frac{1}{3} \log\left(\frac{45}{\pi}\right) = \frac{1}{3} (\log(45) - \log(\pi))$$

En utilisant une table de logarithmes (voir exercice 3-24 b), on détermine

$$\log(45) \approx 1.65321 \text{ et } \log(\pi) \approx 0.49715$$

En effectuant une soustraction et une division par 3, on obtient

$$\log(r) \approx 0.38535$$

Pour trouver r , on lit la table de logarithmes "à l'envers"

$$r \approx 2.4286$$

L'usage d'une table de logarithmes permet de

remplacer la division $\frac{45}{\pi}$ par la soustraction $\log(45) - \log(\pi)$

remplacer l'extraction de la racine cubique par une division par 3.

Dès lors, on a pu aborder des calculs numériques plus compliqués, ce qui a permis de réaliser de substantiels progrès en sciences, par exemple en astronomie.

Question

Avec une méthode semblable, calculez le côté a du tétraèdre régulier de volume $V=80$.

□ Exercice 3-26

a) Considérons la fonction $y = 0.7 \cdot 1.3^x$

Au lieu de dessiner la fonction dans le repère (x, y) , dessinons-la dans le repère $(x, \ln(y))$:

| | | | | | | | |
|----------|-------|--------|--------|--------|---------|-------|------|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $\ln(y)$ | -1.14 | -0.881 | -0.619 | -0.357 | -0.0943 | 0.168 | 0.43 |

Quel type de courbe obtenez-vous ?

b) Montrez que la fonction $x \mapsto \ln(y) = \ln(0.7 \cdot 1.3^x)$ est une fonction affine.

Montrez que la fonction $x \mapsto \ln(y) = \ln(c \cdot r^x)$ est une fonction affine.

Quelle est sa pente ?

c) On donne une suite de points (x, y) . En les plaçant dans un repère $(x, \ln(y))$,

dites s'ils appartiennent à une fonction de la forme $x \mapsto c \cdot r^x$

Si oui, déterminez graphiquement c et r .

| | | | | | | | |
|-----|------|------|------|-----|----|------|-----|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 1.16 | 1.29 | 1.47 | 1.7 | 2. | 2.39 | 2.9 |

d) Même exercice

| | | | | | | | |
|-----|--------|-------|-------|-----|------|-------|------|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 0.0611 | 0.104 | 0.176 | 0.3 | 0.51 | 0.867 | 1.47 |

□ Exercice 3-27

La radioactivité du plutonium 238 diminue de moitié en $T = 86$ ans.

Ecrivez la loi sous la forme $A(t) = A_0 e^{kt}$ et donnez la valeur numérique de k .

Indication : puisque nous savons écrire la loi sous la forme $A(t) = A_0 r^t$, il suffit de faire un changement de base.

□ [Renforcement pour le niveau avancé] Exercice 3-28

L'activité d'une certaine source radioactive est décrite par

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \quad \text{où} \quad \lambda \approx 0.7702 \text{ par heure.}$$

Déterminez r puis le taux horaire.

Récrivez la loi sous la forme $A(t) = A_0 r^t$

Calculez la demi-vie T .

Niveau avancé : réponses de certains exercices

□ Corrigé de l'exercice 3-23

□ 1° $f(x) = ax + b$

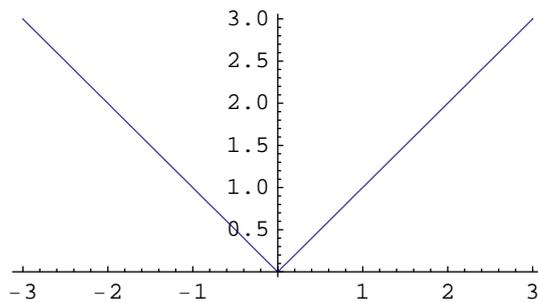
Si $a = 0$, la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est représentée par une droite horizontale; elle n'est donc pas bijective.

Si $a \neq 0$, la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est représentée par une droite oblique; elle est donc bijective. Sa fonction réciproque $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a pour expression analytique

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow ax + b = y \Leftrightarrow ax = y - b \Leftrightarrow x = \frac{y - b}{a}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}$$

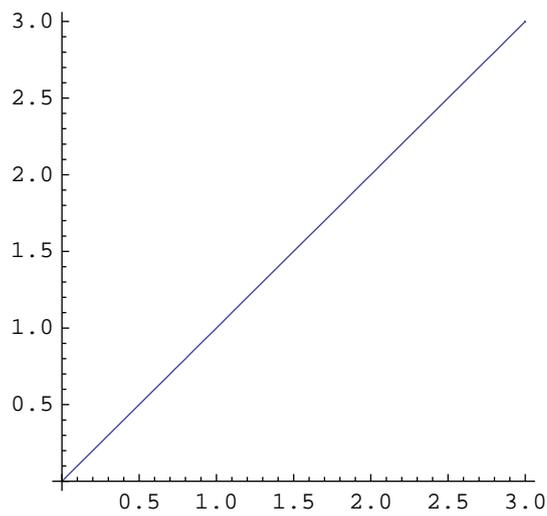
□ 2° $f(x) = |x|$



Observons qu'à $y = 1$ correspondent deux antécédents distincts $x = -1$ et $x = 1$.

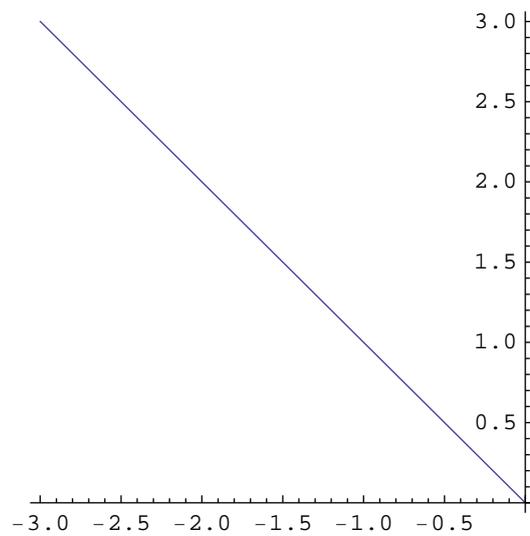
La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est donc pas bijective.

La restriction $f: [0; \infty[\rightarrow [0; \infty[$, $f(x) = x$, est bijective.



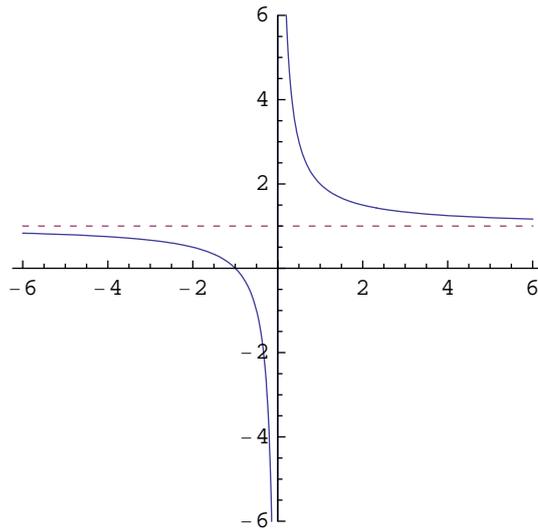
Sa réciproque est ${}^t f(y) = y$.

La restriction $f :]-\infty; 0] \rightarrow [0; \infty[$, $f(x) = -x$, est bijective.



Sa réciproque est ${}^t f(y) = -y$.

$$\square 3^\circ \quad f(x) = \frac{1}{x} + 1$$



La fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas bijective car $y=1$ n'a pas d'antécédent.

La restriction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ est bijective. Sa réciproque est

$${}^x f(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} + 1 = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y - 1}$$

$${}^x f(y) = \frac{1}{y - 1}$$

$${}^r f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}^*$$

\square Corrigé de l'exercice 3-28

\square a) Taux horaire

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 (e^{-\lambda})^t = A_0 r^t \quad \text{où} \quad r = e^{-\lambda} \approx 0.46292$$

Le taux horaire est donc

$$i = r - 1 \approx -0.53708$$

Autrement dit, la radioactivité diminue de 53.7 % par heure.

\square b) Demi-vie T

La demi-vie indique après combien de temps la radioactivité tombe à la moitié de sa valeur initiale.

$$A(T) = \frac{1}{2} A_0 \Leftrightarrow A_0 e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} A_0 \Leftrightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda T = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -\lambda T = -\ln(2)$$

$$T = \frac{\ln(2)}{\lambda} \approx 0.899957 \text{ h} \approx 54 \text{ min}$$

Exercices de base

§ 4 Equations exponentielles et logarithmiques

□ Exercice 4-1

Résolvez les équations suivantes

a) $x^4 = 81$

b) $x^2 - 2 = 0$

c) $2x^5 - 64 = 0$

d) $8x^3 - 1 = 0$

e) $\sqrt{x+1} = 3$

f) $\sqrt[3]{5x+3} = 2$

g) $\sqrt[3]{x^2} = x$

□ Exercice 4-2

Résolvez graphiquement les équations suivantes

a) $3^x = 5.2$

b) $2^{x+1} = 2.3$

c) $2^x = -x$

□ Exercice 4-3

Résolvez les équations suivantes

a) $\log_4(x) = 3$

b) $\log_x(81) = 4$

c) $\log_x(289) = 2$

d) $2^x 3^x = 1.4$

e) $\log(2x) = -3.4$

□ Exercice 4-4

Résolvez les équations suivantes

a) $7^x = 3$

b) $0.7^y = \frac{1}{40}$

c) $(10^{5-x})^{3-x} = 100$

□ Exercice 4-5

Résolvez les équations suivantes

a) $\log\left(\frac{5x}{4}\right) = 2.35$

b) $3.4^x = 5.2$

c) $\frac{2^x}{3^x} = 4.5$

d) $\ln(1-2x) = -2.4$

e) $\ln(3x^3) = 4.8$

□ Exercice 4-6

La population d'une ville est de 15×000 habitants. Elle augmente régulièrement de 2 % par an. Dans combien d'années aura-t-elle triplé ?

□ Exercice 4-7

En l'an 2000, une ville comptait 350×000 habitants alors qu'en 1990 elle en comptait 300×000 . Si la population croît à un taux constant, quel est le taux annuel ? A combien d'habitants peut-on estimer la population en 2009 ?

□ Exercice 4-8

Dans une chambre de refroidissement, on introduit un corps dont la température initiale est de $\Theta_0 = 80^\circ\text{C}$. La température du corps diminue d'un tiers toutes les 10 minutes.

- A quel moment la température sera-t-elle de 40°C ?
- Quelle sera la température après une heure ?

□ Exercice 4-9

Une somme est placée au taux annuel de 2.5 % à intérêts composés. En combien d'années double-t-elle ?

□ Exercice 4-10

Le premier janvier 2002, une personne raconte une rumeur à deux de ses amis. Le lendemain, ces trois personnes propagent chacune la rumeur à deux nouveaux amis et ainsi de suite, chaque jour.

A quelle date 10×000 personnes seront-elles au courant ?

□ Exercice 4-11

Le son le plus faible qu'une oreille humaine puisse percevoir est celui provoqué par une intensité sonore $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

En décibels [dB], le niveau sonore N d'un son d'intensité I est défini par

$$N = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

- Une conversation normale correspond à une intensité sonore de $10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

Calculez son niveau sonore.

- Par quel facteur l'intensité sonore est-elle multipliée lorsque le niveau sonore passe de 60 dB à 90 dB ?

- Un niveau sonore supérieur à 90 dB est considéré comme nuisible aux oreilles.

L'intensité sonore perçue à 100 m d'un avion au décollage est de $1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

Ce son est-il nuisible ?

- Deux sources ont un niveau sonore de 45 dB chacune.

Quel est le niveau sonore de la réunion des deux sources ?

□ Exercice 4-12

Chaque année, la production d'une usine subit une baisse évaluée à 4 % de la production de l'année précédente. Au cours de l'année 1999, la production est de 25×000 unités.

- Calculez la production au cours de l'année 2000, puis au cours de l'année 2001.
- Soit n le nombre d'années à partir du premier janvier 2000 et soit P_n la production au cours de la n -ème année. Exprimez P_n en fonction de n .
- La fabrication du produit n'est plus rentable dès que la production annuelle devient inférieure à

20 × 000 unités. Déterminez le nombre d'années pendant lesquelles la production sera maintenue.

- d) Déterminez la production totale pendant le temps de fonctionnement à partir du premier janvier 1999.

□ Exercice 4-13

Déterminez l'ensemble de définition et l'ensemble des zéros de chacune des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = \ln(3x - 2)$$

$$f_2(x) = \exp(3x) - 2$$

$$f_3(x) = \ln((x - 3)^2)$$

$$f_4(x) = \ln^2(x - 3)$$

$$f_5(x) = \ln\left(\frac{x + 5}{x - 2}\right)$$

Exercices facultatifs de renforcement

□ Exercice 4-14

Résolvez l'équation suivante

$$x^3 + 729 = 0$$

□ Exercice 4-15

Résolvez graphiquement l'équation suivante

$$0.5^x = 3.25$$

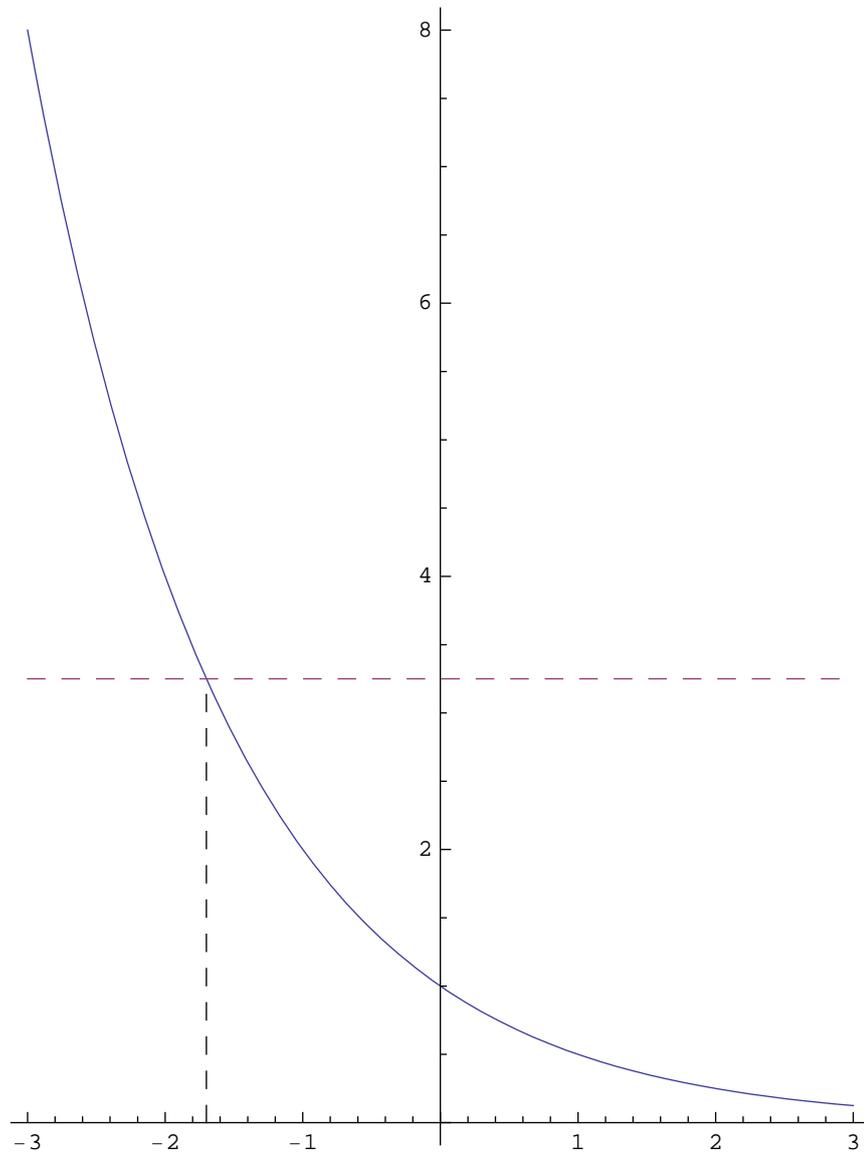
Réponses de certains exercices de renforcement

□ Réponse de l'exercice 4-14

$$x = \sqrt[3]{-729} = -729^{\frac{1}{3}} = -9$$

□ Corrigé de l'exercice 4-15

Dans un même repère, dessinons les graphiques des fonctions $f(x) = 0.5^x$ et $g(x) = 3.25$.



On peut lire sur l'axe des x $x \approx -1.7$

Exercices complémentaires pour le niveau avancé

□ Exercice 4-16

Résolvez graphiquement l'équation suivante

$$e^x = x + 2 \quad \text{où} \quad e \approx 2.718$$

□ Exercice 4-17

Résolvez les équations suivantes

a) $\log(x+1) + \log(3) = \log(2x-3) + \log(7)$

b) $\ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln(18)$

c) $\ln(x^2 - 7) = 2 \ln(x + 3)$

d) $\ln(\sqrt{x+1}) + \ln(\sqrt{x-1}) = \ln(5)$

e) $(\ln x)^2 = \ln(x^2)$

f) $(\log(x))^2 - 5 \log(x) + 4 = 0$

g) $2^x = \sqrt[3]{512}$

h) $\frac{3^x}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt{27}$

- i) $x^{\ln(x)} = 1.8$
 j) $\ln(\ln(x+1)) = 1$
 k) [Renforcement niveau avancé] $3 \ln(5-x) = \ln(35-x^3)$

□ Exercice 4-18

Résolvez les systèmes suivants

- a) $\begin{cases} x + y = 65 \\ \log(x) + \log(y) = 3 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} \ln(x) = \ln(y) + 1 \\ \ln(x) + \ln(y) = 1.954 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} 2 \ln(x) + \ln(y) = 3 \\ \ln(\sqrt{x}) - \ln(\sqrt{y}) = 2 \end{cases}$
 [Renforcement niveau avancé] d) $\begin{cases} \ln(\sqrt{x}) - \ln(\sqrt{5}) = \frac{1}{2} \\ 2 \ln(x) - \ln(y) = 1.398 \end{cases}$
 [Renforcement niveau avancé] e) $\begin{cases} \log(x) - \log(5) = 1 \\ \log(x^3) + \log(y^2) = \log(32) \end{cases}$

□ Exercice 4-19

Résolvez les équations suivantes

- a) $0.76^x = 9.5^{2-x}$
 b) $e^x = 1 + 2e^{-x}$
 c) $2^x + 4^x = 272$
 d) $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$
 e) $3^{\sqrt{x}} = 243$
 f) $x^{\ln(x)} = a$
 [Renforcement niveau avancé] g) $e^x + 2 = e^{-x+\ln(3)}$

□ Exercice 4-20

- a) On dispose du logarithme des nombres premiers suivants: $\log(5) \approx 0.698970$, $\log(71) \approx 1.851258$, $\log(113) \approx 2.053078$; en déduire le logarithme de l'approximation de π par la fraction $\frac{355}{113}$.
 b) Généraliser: montrez que, pour calculer le logarithme de n'importe quel nombre rationnel, il suffit de connaître les logarithmes des nombres premiers.

Niveau avancé : réponses de certains exercices

□ Corrigé de l'exercice 4-17 k)

$$\begin{array}{ll} 3 \ln(5-x) = \ln(35-x^3) & \text{conditions : } 5-x > 0 \text{ et } 35-x^3 > 0 \\ \ln((5-x)^3) = \ln(35-x^3) & \text{et } x < 5 \text{ et } x^3 < 35 \\ e^{\ln((5-x)^3)} = e^{\ln(35-x^3)} & \text{et } x < 5 \text{ et } x < \sqrt[3]{35} \approx 3.271 \\ (5-x)^3 = 35-x^3 & \text{et } x < 5 \\ 125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 35 - x^3 & \text{''} \\ 15x^2 - 75x + 90 = 0 & \text{''} \\ x^2 - 5x + 6 = 0 & \text{''} \\ x = 2 \text{ ou } x = 3 & \text{''} \\ S = \{2, 3\} & \end{array}$$

□ Corrigé de l'exercice 4-18 d)

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(5) = \frac{1}{2} \\ 2 \ln(x) - \ln(y) = 1.398 \end{cases} \quad \text{conditions : } x > 0 \text{ et } y > 0$$

$$\begin{cases} \ln(x) = 1 + \ln(5) \approx 2.609 \\ \ln(y) = 2 \ln(x) - 1.398 \approx 3.821 \end{cases} \quad "$$

$$\begin{cases} x \approx e^{2.609} \approx 13.59 \\ y \approx e^{3.821} \approx 45.64 \end{cases}$$

$$S \approx \{ (13.59; 45.64) \}$$

□ Corrigé de l'exercice 4-18 e)

$$\begin{cases} \log(x) = 1 + \log(5) \\ 3 \log(x) + \log(y^2) = \log(32) \end{cases} \quad \text{conditions : } x > 0 \text{ et } y \neq 0$$

$$\begin{cases} \log(x) \approx 1.699 \\ \log(y^2) = -3 \log(x) + \log(32) \approx -3.592 \end{cases} \quad "$$

$$\begin{cases} x \approx 10^{1.699} \\ y^2 \approx 10^{-3.592} \approx 0.000256 \end{cases} \quad "$$

$$\begin{cases} x \approx 50 \\ y \approx \pm \sqrt{0.000256} \approx \pm 0.016 \end{cases} \quad "$$

$$S \approx \{ (50; -0.016), (50; 0.016) \}$$

□ Corrigé de l'exercice 4-19 g)

$$e^x + 2 = e^{-x} e^{\ln(3)}$$

$$e^x + 2 = 3 e^{-x}$$

$$e^x + 2 = \frac{3}{e^x}$$

$$(e^x)^2 + 2 e^x = 3$$

$$(e^x)^2 + 2 e^x - 3 = 0$$

$$z^2 + 2z - 3 = 0 \quad \text{où } z = e^x$$

$$(z = -3 \text{ ou } z = 1) \quad \text{où } z = e^x$$

$$e^x = -3 \quad \text{ou} \quad e^x = 1$$

$$\text{sans solution ou } x = \ln(1)$$

$$x = 0$$

$$S = \{0\}$$