# Dérivée I

- ***Liens hypertextes***

Dérivée I - Activités préparatoires
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Derivees/1/Derivee_1-Preparation.pdf
Dérivée I - Activités préparatoires - Corrigés:
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Derivees/1/Derivee_1-Preparation-Corriges.pdf
Dérivée I - Exercices de niveau standard:
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Derivees/1/Derivee_1-Exercices_standard.pdf
Dérivée I - Exercices de niveau avancé:
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Derivees/1/Derivee_1-Exercices_avance.pdf
Supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II (page mère):
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/index.html

# § 1 Vitesse instantanée

## § 1.1 Exemple d'introduction

Considérons un corps en chute libre dont l'horaire est

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2} g\, t^2$$

où $h_0 = 125\, m$ (altitude initiale) et $g = 10\, \frac{m}{s^2}$ (accélération gravifique), c'est-à-dire

$$h(t) = 125\,\text{m} - 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\, t^2$$

La fonction $t \mapsto h(t)$ donne l'altitude de l'objet en fonction du temps:

| $t$ [$s$] | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(t)$ [$m$] | 125 | 120 | 105 | 80 | 45 |

Alors que durant l'intervalle de temps [0 *s*;  1 *s*] l'objet a effectué un déplacement de

$$\triangle h = 120\,\text{m} - 125\,\text{m} = -5\,\text{m}$$

durant l'intervalle de temps [3 s; 4 s] son déplacement est de

$$\triangle h = 45\,\text{m} - 80\,\text{m} = -35\,\text{m}$$

La vitesse n'est donc pas constante, on dit que le mouvement est accéléré.

L'objet de ce paragraphe est de répondre à la question suivante :
"A quelle vitesse l'objet atteint-il le sol ? ".
Calculons d'abord l'instant *t* auquel l'objet touche le sol :

$$h(t) = 0\,\text{m}$$

$$125\,\text{m} - 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\, t^2 = 0$$

$$t^2 = \frac{125\,\text{m}}{5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 25\,\text{s}^2 \qquad \text{où} \qquad t \geq 0$$

$$t = 5\,\text{s}$$

La question se laisse reformuler comme suit : "Quelle est la vitesse du mobile à l'instant $t = 5\ s$ ? ".

- **Vitesses moyennes**

Durant l'intervalle de temps [0 *s*;  5 *s*], le déplacement du mobile est de

$$\triangle h = h(5\,\text{s}) - h(0\,\text{s}) = 0\,\text{m} - 125\,\text{m} = -125\,\text{m}$$

et sa vitesse moyenne sur l'intervalle de temps [0 *s*;  5 *s*] est de

$$\bar{v}_{[0;\,5]} = \frac{h(5\,s) - h(0\,s)}{5\,s - 0\,s} = \frac{-125\,m}{5\,s} = -25\,\frac{m}{s}$$

Durant l'intervalle de temps [4 s; 5 s], le déplacement du mobile est de

$$\triangle h = h(5\,s) - h(4\,s) = 0\,m - 45\,m = -45\,m$$

et sa vitesse moyenne sur l'intervalle [4 *s*;  5 *s*] est de

$$\bar{v}_{[4;\,5]} = \frac{h(5\,s) - h(4\,s)}{5\,s - 4\,s} = \frac{-45\,m}{1\,s} = -45\,\frac{m}{s}$$

Durant l'intervalle de temps [4.9 *s*;  5 *s*], le déplacement du mobile est de

$$\triangle h = h(5\,s) - h(4.9\,s) = 0\,m - 4.95\,m = -4.95\,m$$

et sa vitesse moyenne sur l'intervalle [4.9 *s*;  5 *s*] est de

$$\bar{v}_{[4.9;\,5]} = \frac{h(5\,s) - h(4.9\,s)}{5\,s - 4.9\,s} = \frac{-4.95\,m}{0.1\,s} = -49.5\,\frac{m}{s}$$

Durant l'intervalle de temps [4.99 *s*;  5 *s*], le déplacement du mobile est de

$$\triangle h = h(5\,s) - h(4.99\,s) = 0\,m - 0.4995\,m = -0.4995\,m$$

et sa vitesse moyenne sur l'intervalle [4.99 *s*;  5 *s*] est de

$$\bar{v}_{[4.99;\,5]} = \frac{h(5\,s) - h(4.99\,s)}{5\,s - 4.99\,s} = \frac{-0.4995\,m}{0.01\,s} = -49.95\,\frac{m}{s}$$

Durant l'intervalle de temps [4.999 *s*;  5 *s*], le déplacement du mobile est de

$$\triangle h = h(5\,s) - h(4.999\,s) = 0\,m - 0.049995\,m = -0.049995\,m$$

et sa vitesse moyenne sur l'intervalle [4.999 *s*;  5 *s*] est de

$$\bar{v}_{[4.999;\,5]} = \frac{h(5\,s) - h(4.999\,s)}{5\,s - 4.999\,s} = \frac{-0.049995\,m}{0.001\,s} = -49.995\,\frac{m}{s}$$

- **Vitesse instantanée**

En poursuivant ainsi indéfiniment, les vitesses moyennes tendent vers une limite qu'on apelle la vitesse du mobile à l'instant $t = 5\,s$.

$$v(5\,s) = \lim_{t\to 5\,s} \frac{h(5\,s) - h(t)}{5\,s - t} = \lim_{t\to 5\,s} \frac{0\,m - \left(125\,m - 5\,\frac{m}{s^2}\,t^2\right)}{5\,s - t} = \lim_{t\to 5\,s} \frac{5\,\frac{m}{s^2}\,t^2 - 125\,m}{5\,s - t}$$

Lorsque *t* tend vers 5 s, le déplacement $\left(5\,\frac{m}{s^2}\,t^2 - 125\,m\right)$ tend vers 0 m et la durée

$(5\,s - t)$ tend vers 0 s; cette situation est applelée *"indétermination du type* $\frac{0}{0}$*"*.
Le calcul des vitesses moyennes nous convainc pourtant qu'une vitesse limite existe.
Pour obtenir la vitesse instantanée, on peut simplifier la fraction par $(5\,s - t)$ :

$$v(5\,s) = \lim_{t\to 5\,s} \frac{5\,m\left(t^2 - 25\,s^2\right)}{s^2\,(5\,s - t)} = \lim_{t\to 5\,s} \frac{5\,m\,(t - 5\,s)\,(t + 5\,s)}{s^2\,(5\,s - t)} =$$

$$\lim_{t\to 5\,s} \frac{-5\,m\,(t + 5\,s)}{s^2} = \lim_{t\to 5\,s} \left(-5\,\frac{m}{s^2}\,t - 25\,\frac{m}{s}\right) = -5\,\frac{m}{s^2}\,5\,s - 25\,\frac{m}{s} = -50\,\frac{m}{s}$$

## § 1.2 Vitesses moyennes

Soit *r* l'horaire d'un mobile, c'est-à-dire
$t \mapsto r(t)$ = position du mobile sur un axe gradué à l'instant *t*.

Pour une durée de déplacement Δt, le déplacement du mobile durant l'intervalle de temps [*t*;  *t* + Δt] est

$$\triangle r = r(t + \triangle t) - r(t)$$

La vitesse moyenne sur l'intervalle [*t*;  *t* + Δt] est

$$\boxed{\bar{v}_{[t;t+\triangle t]} = \frac{\triangle r}{\triangle t} = \frac{r(t + \triangle t) - r(t)}{\triangle t}}$$

## § 1.3 Vitesse instantanée

La vitesse à l'instant *t* est égale à la limite de la vitesse moyenne sur l'intervalle [t; t+Δt]  lorsque Δt tend vers 0

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_{[t;\, t+\Delta t]} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}}$$

Pour l'exemple du § 1.1, on a

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(125\, m - 5 \frac{m}{s^2} (t + \Delta t)^2\right) - \left(125\, m - 5 \frac{m}{s^2} t^2\right)}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} 5 \frac{m}{s^2} \frac{-(t+\Delta t)^2 + t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 5 \frac{m}{s^2} \frac{-\left(2\, t\, \Delta t + \Delta t^2\right)}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to 0} 5 \frac{m}{s^2} (2\, t + \Delta t) = -10 \frac{m}{s^2} t$$

En particulier,

$$v(5\, s) = -10 \frac{m}{s^2} 5\, s = -50 \frac{m}{s}$$

## § 1.4 Note historique

Les idées fondamentales du *Calcul infinitésimal* ont été énoncées progressivement - et non encore systématiquement - durant la première moitié du **XVII-ème siècle**.

A partir de 1665, **Leibniz** et Newton introduisent des notations commodes, développent et systématisent le *Calcul différentiel*. En utilisant ces nouvelles notions, **Newton** formule les fondements de la *Physique classique* en 1687.

Au XVIII-ème siècle, **Euler** et **Lagrange** donnent à l'*Analyse mathématique* un développement considérable.

# § 2 Dérivée

## § 2.1 Exemple d'introduction

- **Taux d'accroissement**

Les notions de "vitesse moyenne" et de "vitesse instantanée" concernent les horaires. Nous allons généraliser ces deux notions à des fonctions quelconques. Reprenons l'horaire de l'exemple du § 1.1

$$f(x) = 125 - 5\, x^2$$

Sur l'intervalle [0; 5], on a

$\Delta y = f(5) - f(0) = -125$ = différence des ordonnées;

$\Delta x = 5 - 0 = 5$ = différence des abscisses;

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = -25$ = taux d'accroissement de f sur [0; 5];

le taux d'accroissement représente la pente de la sécante qui passe par les deux points (0; 125) et (5; 0).

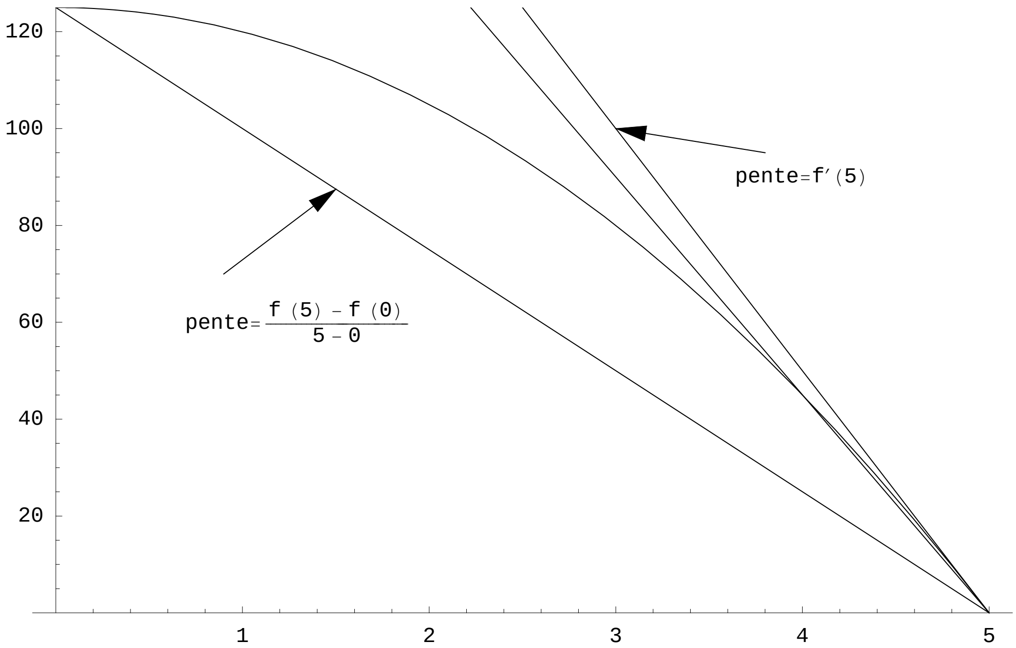
Sur l'intervalle [4; 5], on a

$\Delta y = f(5) - f(4) = -45$ = différence des ordonnées;

$\Delta x = 5 - 4 = 1$ = différence des abscisses;

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = -45$ = taux d'accroissement de f sur [4; 5];

le taux d'accroissement représente la pente de la sécante qui passe par les points (4; 45) et (5; 0).




## § 2.2 Taux d'accroissement

Plus généralement, le taux d'accroissement d'une fonction *f* sur l'intervalle [a; b] est

$$\boxed{\bar{m}_{[a;\,b]} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Le taux d'accroissement de *f* sur [a; b] représente la pente de la sécante qui passe par les deux points

$$(a,\ f(a)) \qquad \text{et} \qquad (b,\ f(b)).$$

Dans le cas particulier où *f* est un horaire, le taux d'accroissement est égal à la vitesse moyenne sur l'intervalle [a; b].

Remarque: Si dans la formule précédente on remplace *b* par *a+h* on obtient

$$\bar{m}_{[a;a+h]} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (\Delta x = h)$$

## § 2.3 Nombre dérivé

La dérivée de *f* en l'abscisse *a* est égale à la limite du taux d'accroissement de *f* sur l'intervalle [a; x] lorsque *x* tend vers *a*. Elle est notée *f′*(a).

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \bar{m}_{[a;\,x]} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Dans le graphique, la dérivée de *f* en *a* donne la pente de la tangente à *f* en *a*.

Pour $f(x) = 125 - 5\,x^2$, calculons la dérivée de *f* en *a*:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\left(125 - 5\,x^2\right) - \left(125 - 5\,a^2\right)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{-5\,\left(x^2 - a^2\right)}{x - a}$$

Le dénominateur et le numérateur tendent tous deux vers 0. Pour lever l'indétermination, simplifions par (x-a) :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} -5\,(x + a) = -5\,(a + a) = -10\,a$$

Dans le cas particulier où *f* est un horaire, la dérivée de *f* en *a* est égale à la vitesse du mobile à l'instant *a*:

$$f'(a) = v(a)$$

par exemple,

$$v(5) = f'(5) = -50.$$

Si la limite n'existe pas, on dit que la fonction *f* n'est pas dérivable en *a* (voir § 2.6).

Remarque: Si, dans la définition ci-dessus, on remplace *a* par *x* et *x* par *x+h*, on obtient

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Cette expression est très utilisée car il est généralement un peu plus facile de simplifier une fraction par $h$ que par $x-a$. Le calcul de l'exemple précédent donne

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(125 - 5(x+h)^2\right) - \left(125 - 5x^2\right)}{h} =$$

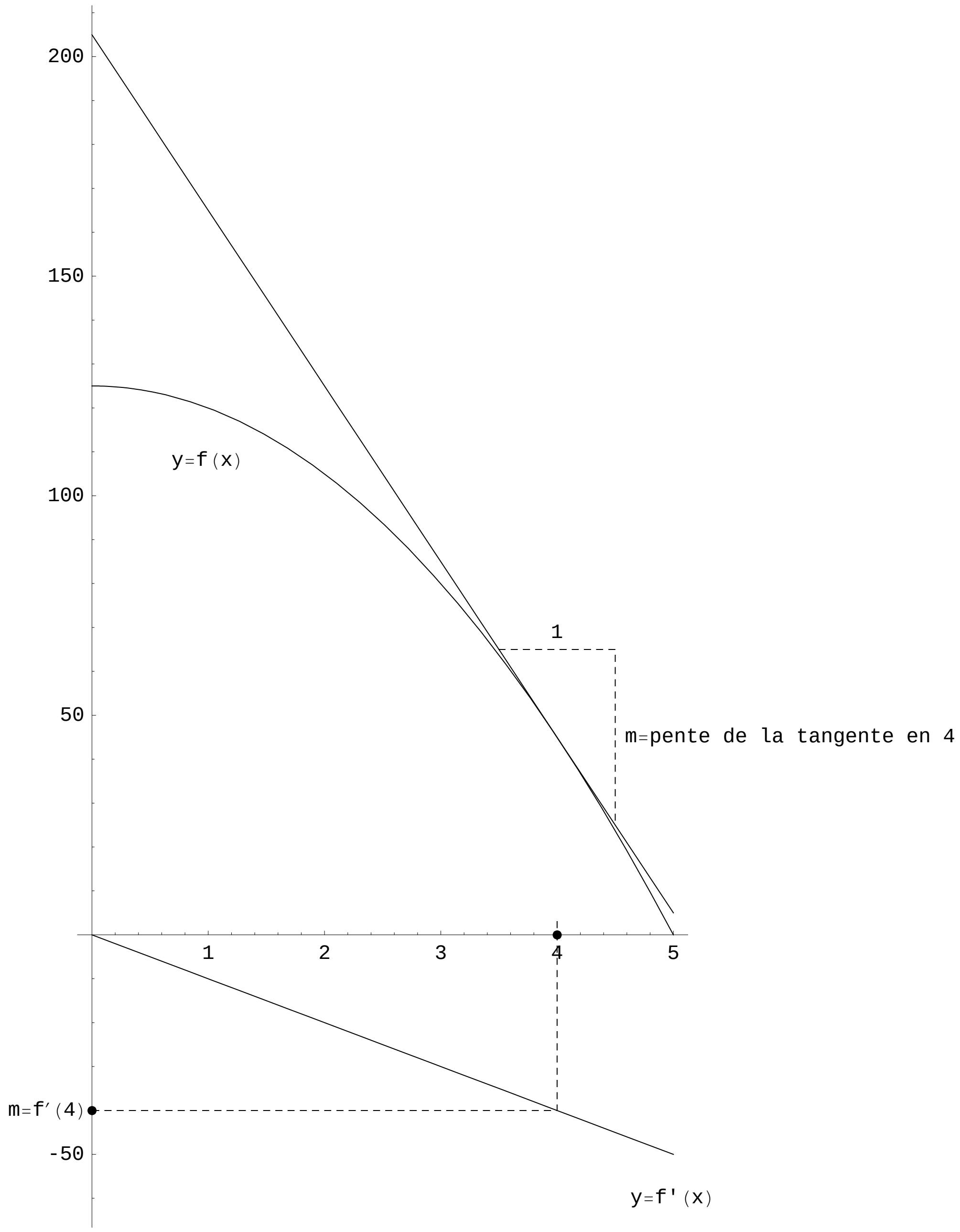
$$\lim_{h\to 0} \frac{-5\left(2xh + h^2\right)}{h} = \lim_{h\to 0} -5(2x+h) = -5(2x+0) = -10x$$

## § 2.4 Fonction dérivée

<u>Exemple 1 :</u>

A la fonction $x \mapsto f(x) = 125 - 5x^2$, on peut associer la fonction dérivée

$$x \mapsto f'(x) = -10x$$




Pour chaque $x$, la valeur $m = f'(x)$ indique la pente de la tangente à $f$ en $x$

(voir figure où $x = 4$ et $m = -40$).

Exemple 2 :

Dans un repère orthonormé, on donne la fonction affine *f* représentée par la droite d'équation

$$y = m\,x, \qquad m > 0.$$

Considérons le triangle dont les sommets sont

$$O\,(0, 0),\ X\,(x, 0) \quad \text{et} \quad P\,(x, mx) \quad \text{où} \quad x > 0.$$

L'aire de ce triangle peut être considérée comme une fonction

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$
$$x \mapsto \frac{1}{2}\,mx^2$$

Le calcul de *f* '(x) se fait comme suit:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}\,m\,(x+h)^2 - \frac{1}{2}\,mx^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}\,m\left(x^2 + 2\,xh + h^2 - x^2\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}\,m\left(2\,hx + h^2\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\,m\,(2\,x + h) = \frac{1}{2}\,m\,(2\,x + 0) = m\,x$$

Nous constatons que la dérivée de la fonction qui donne l'aire du triangle est celle qui donne sa hauteur.

Cas général :
Soit *f* une fonction et $D_f$ son ensemble de définition :

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

L'ensemble des valeurs de *x* pour lesquelles $f'(x)$ est un nombre réel est l'ensemble de dérivabilité de la fonction. On peut désigner cet ensemble par $D_{f'}$ et considérer la fonction

$$f' : D_{f'} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x).$$

$f'$ est la fonction dérivée de *f*.

$D_{f'} \subset D_f$ mais l'égalité $D_{f'} = D_f$ n'est pas vraie pour toute fonction.

A partir de la définition, le calcul de $f'(x)$ peut s'effectuer de deux manières:

$$1° \qquad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$2° \qquad f'(x) = \lim_{x^*\to x} \frac{f(x^*) - f(x)}{x^* - x}$$

# § 2.5 Règles de calcul des dérivées

### Premières règles

*f* et *g* désignent des fonctions dérivables,
*k* désigne une <u>constante</u> réelle,
*n* désigne un nombre <u>entier</u>.
On a

$$\boxed{\begin{array}{l} (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \\ (k\cdot f)'(x) = k\,f'(x) \\ (f\cdot g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \\ (x^n)' = n\,x^{n-1} \end{array}}$$

On peut retrouver ces règles dans *Formulaires et tables*, p. 74 et 75. La démonstration des trois premières règles est laisssée à l'initiative de l'enseignant. La quatrième règle fait l'objet d'un exercice.

### Dérivée du quotient de deux fonctions

Après avoir fait les exercices qui se rapportent à ce thème, il faut retenir les résultats suivants qu'on peut retrouver à partir du *Formulaires et tables*, p. 74

$g$ désignant une fonction dérivable avec $g(x) \neq 0$, on a

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

qu'on note aussi plus succinctement

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

$f$ et $g$ désignant des fonctions dérivables avec $g(x) \neq 0$, on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

qu'on note aussi plus succinctement

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}}$$

### Dérivée de la composition de deux fonctions et de la fonction réciproque

Après avoir fait les exercices qui se rapportent à ce thème, il faut retenir le résultat suivant qu'on peut trouver dans *Formulaires et tables*, p. 74

$f$ et $g$ désignant des fonctions dérivables, on a

$$\boxed{(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)}$$

qu'on note aussi plus succinctement

$$(g\circ f)' = (g'\circ f)\cdot f'$$

Appliquons la règle précédente à la composition $f\circ({}^{r}f)$. D'une part, on a

$$(f\circ({}^{r}f))'(x) = f'({}^{r}f(x))\cdot({}^{r}f)'(x)$$

D'autre part, on a

$$(f\circ({}^{r}f))'(x) = (x)' = 1$$

Donc

$$f'({}^{r}f(x))\cdot({}^{r}f)'(x) = 1$$

$$\boxed{({}^{r}f)'(x) = \frac{1}{f'({}^{r}f(x))}}$$

qu'on note aussi plus succinctement

$$({}^{r}f)' = \frac{1}{f'\circ({}^{r}f)}$$

**Dérivée d'une fonction élevée à la puissance d'un exposant rationnel ou réel**

Après avoir fait les exercices qui se rapportent à ce thème, il faut retenir le résultat suivant qu'on peut retrouver en combinant les règles précédentes

$n$ désignant un nombre <u>réel</u> et $f$ désignant une fonction dérivable en $x$, on a

$$(f^n)'(x) = n\, f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$$

qu'on note aussi plus succinctement

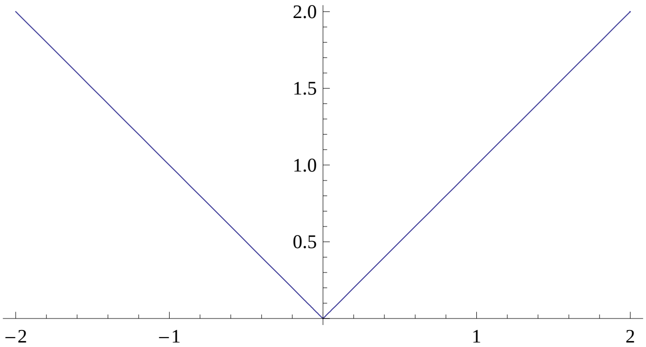
$$\boxed{(f^n)' = n\, f^{n-1}\, f'}$$

# § 2.6 Dérivabilité à droite, dérivabilité à gauche, points anguleux

- **Exemple**

Calculons la dérivée de la fonction

$$f(x) = |x|$$




Pour $x > 0$, on a $f(x) = x$ et par suite

$$f'(x) = 1$$

Pour $x < 0$, on a $f(x) = -x$ et par suite

$$f'(x) = -1$$

Quelle est la dérivée de $f$ en 0 ? Pour le savoir, partons de la définition

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

Distinguons les limites à droite et à gauche

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\downarrow 0} 1 = 1$$

$$\lim_{h\uparrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\uparrow 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\uparrow 0} -1 = -1$$

Existe-t-il un et un seul nombre réel vers lequel tend $\frac{|h|}{h}$ lorsque $h \to 0$(de n'importe quelle manière) ?

Non ! Donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \quad \text{n'existe pas.}$$

Lorsque la limite qui apparaît dans la définition de la dérivée n'existe pas, on dit que <u>la fonction $f$ n'est pas dérivable en 0</u>.

L'expression suivante est appelée "dérivée à droite de $f$ en 0" (dans la définition de la dérivée, on a remplacé "limite" par "limite à droite"):

$f_d'(0)$ = dérivée de la fonction $x \mapsto x$ qui est à droite de zéro, en $x = 0$; plus précisément

$$f_d'(0) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\downarrow 0} 1 = 1$$

L'expression suivante est appelée "dérivée à gauche de $f$ en 0"

$f_g'(0)$ = dérivée de la fonction $x \mapsto -x$ qui est à gauche de zéro, en $x = 0$; plus précisément

$$f_g'(0) = \lim_{h\uparrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\uparrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\uparrow 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\uparrow 0} -1 = -1$$

Lorsque les dérivées à droite et à gauche existent et sont différentes, on dit que $f$ possède un point anguleux en 0

$$f_d'(0) \neq f_g'(0)$$

- **Généralisation**

On définit les dérivées à droite et à gauche d'une fonction $f$ en $a$ comme suit

$$f_d'(a) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f_g'(a) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

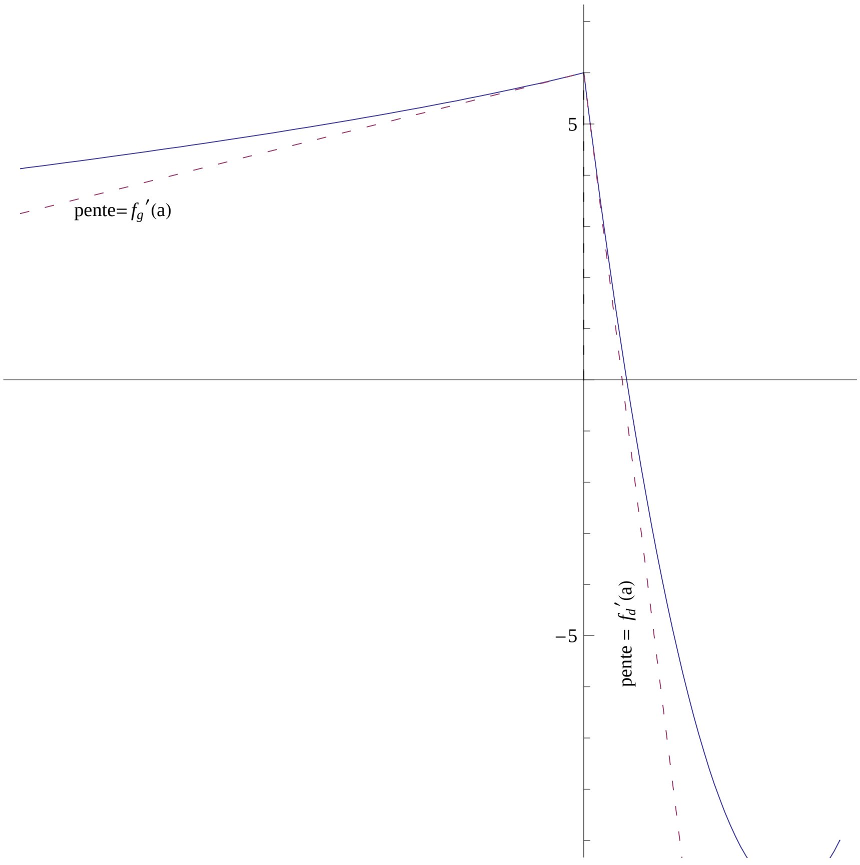
Pour qu'une fonction soit dérivable en $a$, il faut que les dérivées à droite et à gauche existent et soient égales

$$f_d'(a) = f_g'(a) = f'(a)$$

Dans tous les autres cas, la fonction $f$ n'est pas dérivable en $a$.

Lorsque les dérivées à droite et à gauche existent et sont différentes, on dit que $f$ possède un point anguleux en $a$ (voir la figure qui suit)

$$f_g'(a) \neq f_d'(a)$$

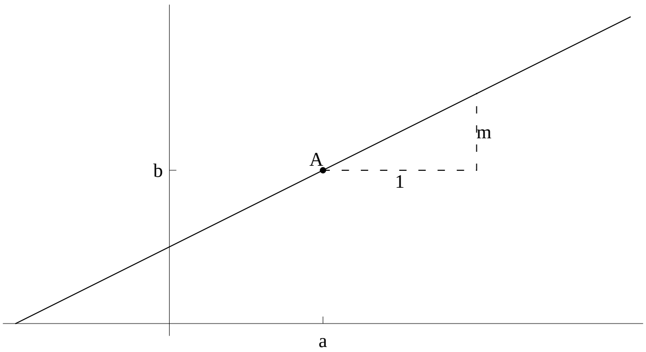



# § 3 Applications de la dérivée

## § 3.1 Equation de la tangente

- **Equation de la droite de pente m passant par A(a, b)**

Sont données la pente $m$ d'une droite et les coordonnées A(a, b) d'un point.
On cherche l'équation de la droite de pente $m$ qui passe par A(a, b).



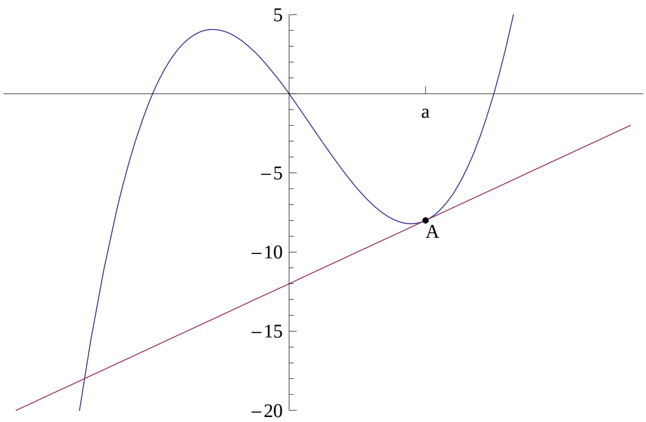

L'équation de la droite cherchée est

$$y = m\,(x - a) + b$$

- **Tangente par un point situé sur la courbe**

Sont données
  * l'équation d'une courbe $y = f(x)$;
  * le nombre $a$.

Au nombre $a$ correspond le point A situé sur la courbe. Est cherchée l'équation de la tangente à $f$ en $a$, c'est-à-dire de la tangente à la courbe au point A.




Cette tangente est déterminée par
  * sa pente $m = f'(a)$;
  * les coordonnées du point A, en particulier son ordonnée $b = f(a)$.

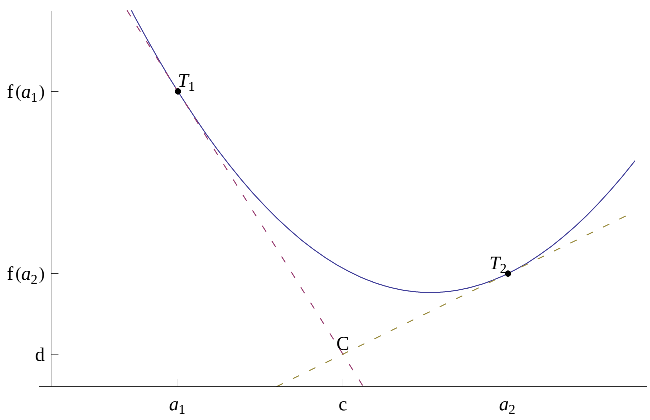
Son équation est

$$\boxed{y = f'(a)\,(x - a) + f(a)}$$

- **Tangente par un point situé hors de la courbe**

Sont données
  * l'équation d'une courbe $y = f(x)$;
  * les coordonnées d'un point C(c, d) situé hors de la courbe.

Sont cherchées les équations des tangentes à $f$ qui passent par $C$.



Les abscisses $a_1$, $a_2$, ... des points de tangence $T_1$, $T_2$, ... sont inconnues. On les détermine en partant de l'idée que "la tangente à $f$ en $a$ passe par le point $(c, d)$". Il s'agit donc de résoudre l'équation suivante d'inconnue $a$

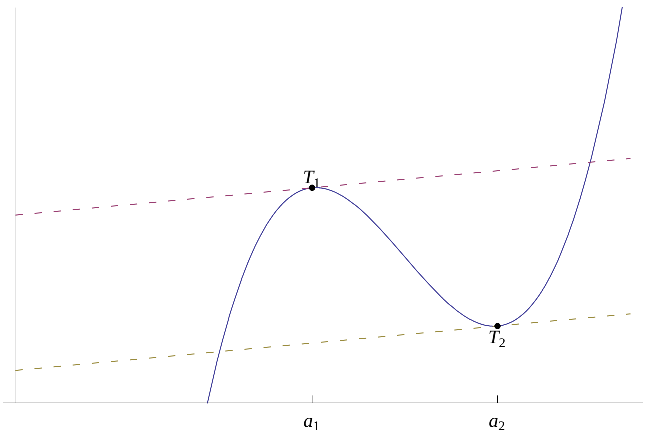
$$d = f'(a)(c - a) + f(a)$$

dont l'ensemble des solutions est S={$a_1$, $a_2$, ...}. Dans le cas où le problème admet deux solutions (comme dans la figure), les équations des tangentes s'écrivent sous la forme

$$y = f'(a_1)(x - a_1) + f(a_1)$$
$$y = f'(a_2)(x - a_2) + f(a_2)$$

- **Tangente à une courbe, de pente m donnée**

Sont donnés
 * l'équation d'une courbe $y = f(x)$;
 * le nombre $m$.
Sont cherchées les équations des tangentes à $f$ de pente $m$.




Les abscisses $a_1$, $a_2$, ... des points de tangence $T_1$, $T_2$, ... sont inconnues. On les détermine en partant de l'idée que "la dérivée à $f$ en $a$ vaut $m$". Il s'agit donc de résoudre l'équation suivante d'inconnue $a$

$$f'(a) = m$$

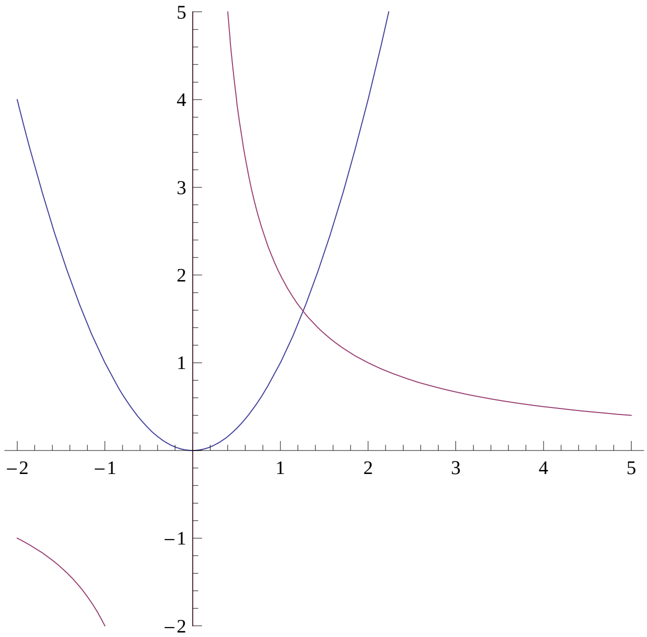
dont l'ensemble des solutions est S={$a_1$, $a_2$, ...}. Dans le cas où le problème admet deux solutions (comme dans la figure), les équations des tangentes s'écrivent sous la forme

$$y = m(x - a_1) + f(a_1)$$
$$y = m(x - a_2) + f(a_2)$$

## § 3.2 Angles entre deux courbes

Considérons l'exemple suivant. On donne deux fonctions

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = \frac{2}{x}$$




Sous quels angles se coupent les deux courbes ?

- **Première étape: abscisses des points d'intersection**

Déterminons d'abord les abscisses des points d'intersection.

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = \frac{2}{x}$$

$$x^2 - \frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{x^3 - 2}{x} = 0$$

$$x^3 - 2 = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0$$

$$x = \sqrt[3]{2}$$

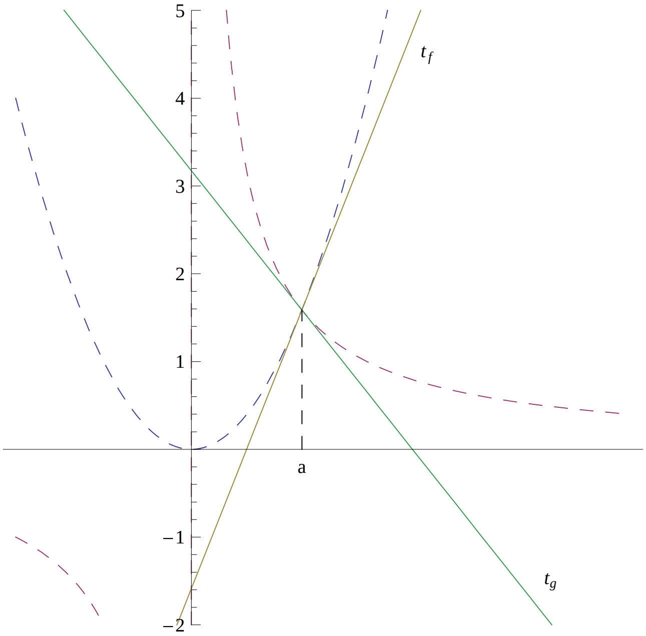
Appelons *a* l'abscisse du point d'intersection

$$a = \sqrt[3]{2} \simeq 1.25992$$

- **Deuxième étape: réduction aux angles entre deux droites**

En un point d'intersection des deux courbes, comment mesurer les angles entre les deux courbes ? Pour donner un sens à la question, on pose la définition suivante:

*les angles entre les deux courbes sont les angles entre les deux tangentes à ces courbes au point d'intersection.*




Les pentes $m_f$ et $m_g$ des deux tangentes $t_f$ et $t_g$ sont données par les dérivées des fonctions au point d'intersection

$$f'(x) = \left(x^2\right)' = 2\,x;$$

$$m_f = f'(a) = 2\,a \simeq 2.51984$$

$$g'(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' = 2\left(\frac{1}{x}\right)' = 2\left(x^{-1}\right)' = 2\,(-1)\,x^{-2} = \frac{-2}{x^2};$$

$$m_g = g'(a) = \frac{-2}{a^2} \simeq -1.25992$$

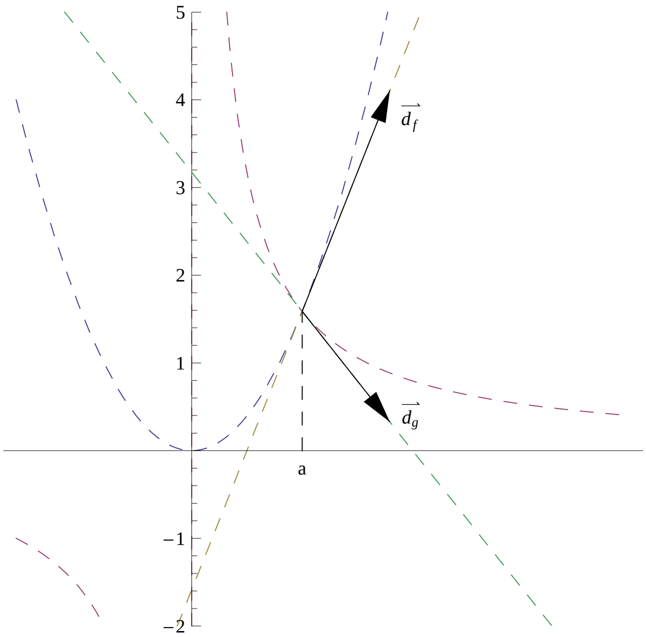
- **Troisième étape: réduction à l'angle entre deux vecteurs**

Les angles entre deux droites sont deux angles supplémentaires. C'est pourquoi il suffit d'en déterminer un.

Pour chaque droite, on choisit un vecteur directeur

$$\overrightarrow{d_f} = \begin{pmatrix} 1 \\ m_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{d_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ m_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ g'(a) \end{pmatrix}$$




L'angle entre les deux vecteurs peut se calculer au moyen du produit scalaire

$$\overrightarrow{d_f}.\overrightarrow{d_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ m_f \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ m_g \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + m_f \cdot m_g = 1 + m_f\, m_g$$

$$\overrightarrow{d_f}.\overrightarrow{d_g} = \left\| \overrightarrow{d_f} \right\| \left\| \overrightarrow{d_g} \right\| \cos\left(\measuredangle\left(\overrightarrow{d_f}, \overrightarrow{d_g}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow \cos\left(\measuredangle\left(\overrightarrow{d_f}, \overrightarrow{d_g}\right)\right) =$$

$$\frac{\overrightarrow{d_f}.\overrightarrow{d_g}}{\left\| \overrightarrow{d_f} \right\| \left\| \overrightarrow{d_g} \right\|} = \frac{1 + m_f\, m_g}{\sqrt{1 + m_f^2}\sqrt{1 + m_g^2}} = \frac{1 + 2.51984\,(-1.25992)}{\sqrt{1 + 2.51984^2}\sqrt{1 + (-1.25992)^2}} \simeq -0.498719$$

La mesure de l'angle entre les deux vecteurs est donc

$$\arccos(-0.498719) \simeq 119.915\,°$$

"L'autre angle" entre les deux droites est donc

$$180\,° - 119.915\,° \simeq 60.085\,°$$

- **Remarques**

Dans le cas où il y a plusieurs points d'intersection, il faut calculer les angles en chaque point d'intersection.

En mathématiques, le mot "courbe" a le sens très général de "graphe d'une fonction"; c'est pourquoi l'une ou l'autre courbe peut très bien être une droite.

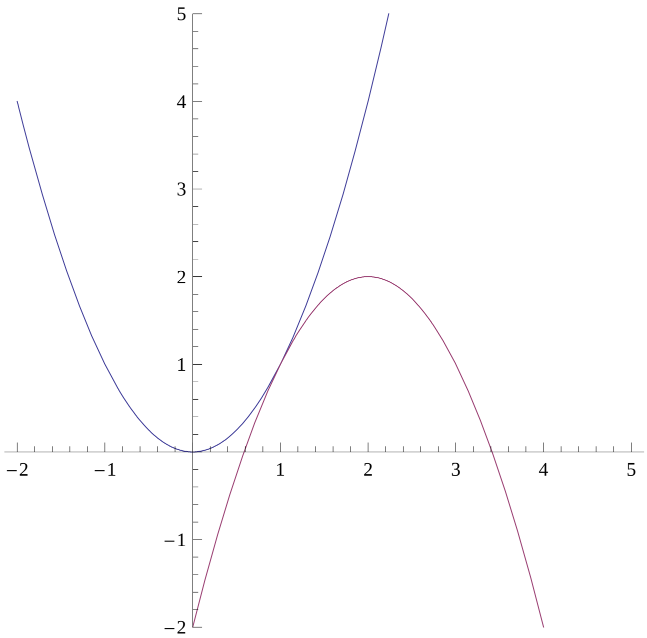
La méthode que nous avons décrite au moyen d'un exemple se généralise sous l'hypothèse que les deux fonctions sont dérivables en chaque point d'intersection.

# § 3.3 Courbes tangentes

- **Exemple**

Considérons les deux fonctions

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = -x^2 + 4x - 2$$




Calculons les abscisses de leurs points d'intersection

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = -x^2 + 4x - 2$$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

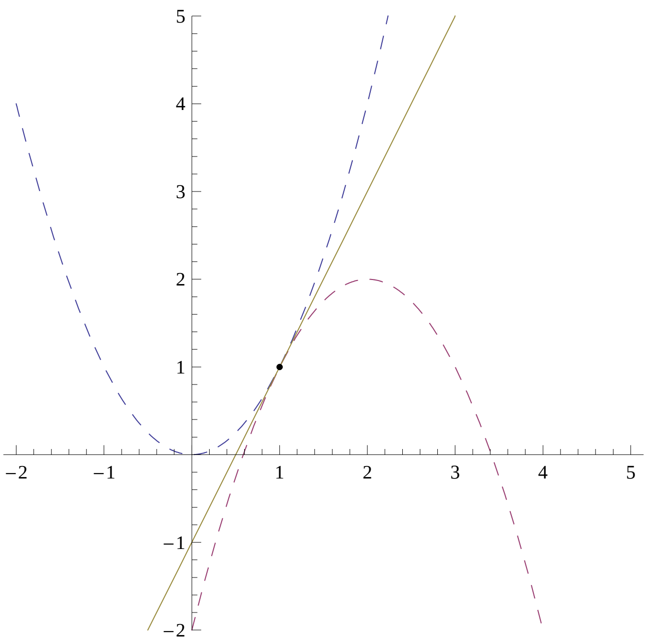
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Montrons que, en $x = 1$, ces deux fonctions ont une tangente commune




$$f'(x) = 2x;\ f'(1) = 2$$

$$g'(x) = -2x + 4;\ g'(1) = 2$$

La tangente commune a pour équation

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$$

$$y = g'(1)(x - 1) + g(1) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$$

- **Généralisation et définition**

On dit que deux fonctions sont tangentes si et seulement les deux courbes se coupent et, au point d'intersection, les deux tangentes ont la même pente. Plus précisément, (les graphes de) deux fonction $f$, $g$ sont tangentes en $x = a$ si et seulement si les <u>deux</u> conditions suivantes sont vérifiées

$$f(a) = g(a) \qquad \text{et} \qquad f'(a) = g'(a)$$

Corollaire : si deux courbes sont tangentes en $x = a$, alors, en ce point, l'angle entre les deux courbes est nul.