Intégration des fractions rationnelles, première partie: Réduction en fractions simples

Marcel Délèze

Liens hypertextes

Calcul numérique du nombre π avec des sommes de Darboux
Techniques d'intégration: par parties, par substitution, par changement de variables
Exemples d'intégration par changement de variable
Supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II (page mère)
www.deleze.name/marcel/sec2/cours/index.html

Proposition 1

Si $x_1 \neq x_2$ alors pour tous $m, p \in \mathbb{R}$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{x_1, x_2\}$

$$\frac{m x + p}{(x - x_1)\,(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2} &= \frac{a\,(x - x_2) + b\,(x - x_1)}{(x - x_1)\,(x - x_2)} \\ &= \frac{(a + b) x + (-a x_2 - b x_1)}{(x - x_1)\,(x - x_2)} \\ &\overset{!}{=} \frac{m x + p}{(x - x_1)\,(x - x_2)}\end{aligned}$$

Afin que la dernière égalité soit satisfaite pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{x_1, x_2\}$, nous exigeons que les coefficents du polynôme en x coïncident :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & +b & = & m \\ -x_2 a & -x_1 b & = & p \end{array}\right.$$

Il s'agit d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues (a, b) dont le déterminant est

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -x_2 & -x_1 \end{pmatrix} = -x_1 + x_2 \neq 0$$

Puisque le déterminant est non nul, le système possède 1 et 1 seule solution(a, b) qui dépend de (x_1, x_2, m, p).

Application au calcul intégral

Si $x_1 \neq x_2$ alors

$$\int \frac{m x + p}{(x - x_1)\,(x - x_2)} \,\mathrm{d}x = a \int \frac{1}{x - x_1} \,\mathrm{d}x + b \int \frac{1}{x - x_2} \,\mathrm{d}x = a \ln |x - x_1| + b \ln |x - x_2| + c$$

Proposition 2

Pour tous $m, p \in \mathbb{R}$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$

$$\frac{mx+p}{(x-x_1)^{\,2}} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{(x-x_1)^{\,2}}$$

Démonstration

$$\frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{(x-x_1)^{\,2}} = \frac{a\,(x-x_1)+b}{(x-x_1)^{\,2}} = \frac{ax+(-ax_1+b)}{(x-x_1)^{\,2}} \overset{!}{=} \frac{mx+p}{(x-x_1)^{\,2}}$$

Afin que la dernière égalité soit satisfaite pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$, nous exigeons que les coefficents du polynôme en x coïncident :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & m \\ -x_1 a + b & = & p \end{array} \right.$$

Il s'agit d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues(a, b) qui possède 1 et 1 seule solution :

$$\left\{ \begin{array}{c} a = m \\ b = ax_1 + p \end{array} \right.$$

Application au calcul intégral

$$\int \frac{mx+p}{(x-x_1)^{\,2}}\,\mathrm{d}x = a \int \frac{1}{x-x_1}\,\mathrm{d}x + b \int (x-x_2)^{\,-2}\,\mathrm{d}x$$
$$= a \ln|x-x_1| + b(-1)\,(x-x_1)^{\,-1} + c = a\ln|x-x_1| - \frac{b}{x-x_1} + c$$

Exercices

Intégrer les fractions rationnelles suivantes:

$$\text{a)} \quad \int \frac{x^3}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{b)} \quad \int \frac{x^3}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x$$

Corrigé de a)

$$\int \frac{x^3}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x$$

1-ère étape: effectuer la division euclidienne

$$\frac{x^3}{x^2-x-6} = x+1+\frac{7x+6}{x^2-x-6}$$

2-ème étape: décomposer en fractions simples

$$\frac{7x+6}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{(A+B)x+(-3A+2B)}{(x+2)(x-3)}$$

$$A+B=7; \quad -3A+2B=6; \quad \Longrightarrow \quad A=\frac{8}{5}; \quad B=\frac{27}{5};$$

$$\frac{x^3}{x^2-x-6}=x+1+\left(\frac{8}{5}\right)\frac{1}{x+2}+\left(\frac{27}{5}\right)\frac{1}{x-3}$$

3-ème étape: intégrer

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x &= \int (x+1)\,\mathrm{d}x+\frac{8}{5}\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x+\frac{27}{5}\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2+x+\frac{8}{5}\ln|x+2|+\frac{27}{5}\ln|x-3|+c\end{aligned}$$

Corrigé de b)

$$\int \frac{x^3}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x$$

1-ère étape: effectuer la division euclidienne

$$\frac{x^3}{x^2+4x+4}=x-4+\frac{12x+16}{x^2+4x+4}$$

2-ème étape: décomposer en fractions simples

$$\frac{12x+16}{(x+2)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}=\frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}=\frac{Ax+(2A+B)}{(x+2)^2}$$

$$A=12; \; 2A+B=16; \; \Longrightarrow \; A=12; \; B=-8;$$

$$\frac{x^3}{x^2+4x+4}=x-4+\frac{12}{x+2}-\frac{8}{(x+2)^2}$$

3-ème étape: intégrer

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x &= \int (x-4)\,\mathrm{d}x+12\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x-8\int \frac{1}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2-4x+12\ln|x+2|+\frac{8}{x+2}+c\end{aligned}$$

Remarque

Dans le cas où le dénominateur est de degré deux non factorisable, voir le document "*intégration des fractions rationnelles, deuxième partie*".