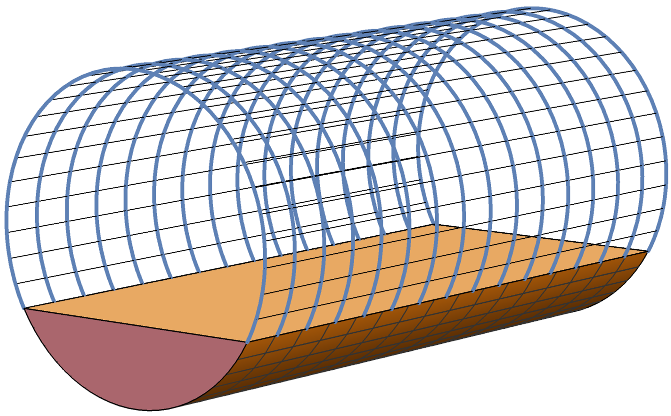
Applications des mathématiques

Equations

Résolution de l'équation f(x) = 0 par diverses méthodes



Version pour *Mathematica*
Edition 2017
Marcel Délèze
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/index.html

Printed by Wolfram Mathematica Student Edition

Introduction

Expressions analytiques et méthodes numériques

Lorsqu'on a affaire à une équation à une seule inconnue, il est toujours possible de passer tous les termes dans le membre de gauche de telle sorte que le membre de droite soit nul. Par exemple,

$$\frac{3x^2-5x+6}{x+1}=\frac{5}{x}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \frac{3x^2-5x+6}{x+1}-\frac{5}{x}=0$$

Dans ce chapitre, par équation, nous entendons une équation à une inconnue de la forme

$f(x) = 0$

A propos des équations que l'on étudie dans les écoles, l'ensemble des solutions peut généralement s'exprimer par des expressions analytiques qui représentent des valeurs exactes.

Par exemple, l'équation $x^2-5=0$ a pour ensemble des solutions $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$.
On dit alors que la solution peut s'exprimer au moyen de fonctions élémentaires (il s'agit de toutes les fonctions usuelles: polynômes, racines, fonctions trigonométriques, exponentielles, logarithmes, etc.).

Cependant, toutes les équations ne sont pas de cette sorte. Beaucoup de problèmes conduisent à des systèmes d'équations dont on ne peut pas décrire l'ensemble des solutions au moyen d'expressions analytiques. Pour les équations polynomiales de degré ≥ 5, *Lindemann* (XIX^e *s*) a démontré qu'il n'existe pas de formule faisant usage des racines *n*-ièmes et donnant les solutions du cas général.

Comme autre exemple, pour l'équation $\cos(x)-x=0$, il n'est pas possible d'écrire la solution $x =$ ... sous la forme d'une expression analytique. Pour une telle équation, on utilise une méthode numérique qui fournit une suite d'approximations successives (méthode de la bissection, méthode de la sécante, méthode du point fixe, méthode de *Newton*, etc.). C'est ainsi que, pour l'équation $\cos(x)-x=0$, on peut donner une réponse numérique approchée $x \simeq 0.7390851332$

Plan du chapitre

Au **§ 1 Mise en équations**, nous allons étudier quelques situations - des problèmes de géométrie et de physique - qui aboutissent à des équations qu'il n'est pas toujours possible de résoudre par l'algèbre élémentaire.

Au **§ 2 Méthodes numériques**, nous résoudrons ces équations sans ordinateur, soit graphiquement, soit au moyen de méthodes numériques telles que la méthode de la bissection, la méthode de la sécante et la méthode du point fixe.

Au **§ 3 Résolution d'équations avec *Mathematica***, nous résoudrons des équations avec l'ordinateur.

Printed by Wolfram Mathematica Student Edition

§ 1 Mise en équations

On demande de mettre en équations chacun des problèmes 1-P 1 à 1-P 5 ci-dessous.

Classez chaque équation obtenue dans l'une des trois catégories suivantes :

I L'équation peut être résolue par l'algèbre élémentaire (par exemple, une équation bicarrée).

II L'équation pourrait être résolue par radicaux, par exemple, une équation polynomiale de degré 3 ou 4. Mais, comme cela réclamerait un effort particulier, il peut être plus commode d'utiliser une méthode numérique.

III La solution de l'équation ne peut pas être exprimée au moyen de fonctions élémentaires (par exemple, $\cos(x) = x$ ou bien une équation polynomiale de degré ≥ 5). Une méthode numérique est indispensable.

On résoudra immédiatement les équations de la catégorie I.
Par contre, la résolution des équations des catégories II et III est reportée après l'étude des paragraphes 2 et 3.

Indication : pour les exercices qui suivent, utilisez les *Formulaires et tables*.

Problème 1 - P 1 [sans ordinateur]

D'un cône droit, on donne sa hauteur h et son aire totale A. Calculez son rayon r.

Problème 1 - P 2 [sans ordinateur]

D'un triangle rectangle, on connaît son aire A et la projection p d'une cathète sur l'hypoténuse.
Calculez les grandeurs des trois côtés a, b, c.

Problème 1 - P 3 [sans ordinateur]

Une boule homogène de rayon *r*, de masse volumique ρ_1 flotte sur un liquide de masse volumique ρ_0. (Hypothèse : $\rho_1 < \rho_0$)
Calculez la hauteur *h* de la partie émergente.

Indications pour l'exercice 1 - P 3

1. Le poids du corps (voir *Formulaires et tables*)

   Le poids du corps est une force qui est représentée par un vecteur $\vec{P}$ dirigé vers le bas

   $$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m\,g \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad g \approx 9.81 \,\frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

   La masse du corps est égale à la masse volumique du corps multipliée par le volume de la boule

   $$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_1\, V\, g \end{pmatrix}$$

2. La poussée d'Archimède (voir *Formulaires et tables*)

   La poussée d'Archimède est une force représentée par un vecteur $\vec{A}$ dirigé vers le haut

   $$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ A \end{pmatrix}$$

   où A est le poids du liquide déplacé, c'est-à-dire le poids en liquide de la partie immergée du corps notée V_{im}

   $$A = \rho_0\, V_{im}\, g; \qquad \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_0\, V_{im}\, g \end{pmatrix}$$

3. La loi d'équilibre (voir *Formulaires et tables*)

   Pour un corps au repos, la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle:

   $$\vec{P} + \vec{A} = \vec{0}$$

   $$\begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_1\, V\, g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_0\, V_{im}\, g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad -\rho_1\, V\, g + \rho_0\, V_{im}\, g = 0$$

   $$\boxed{\rho_1\, V = \rho_0\, V_{im}}$$

   En mots: pour un corps flottant, **la masse du corps est égale à la masse du liquide déplacé**.
   Faisons apparaître le volume émergeant $V_é$

   $$V_{im} = V - V_é$$

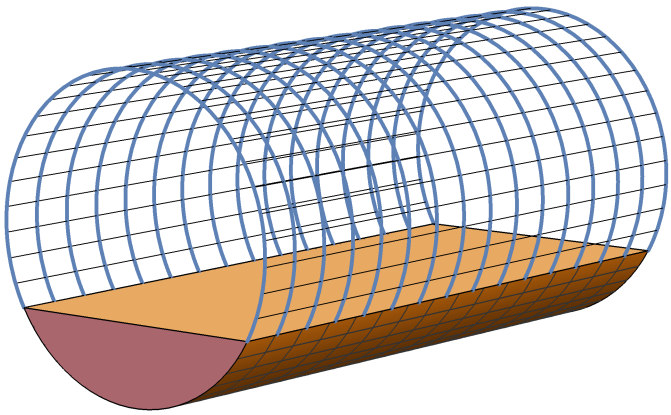
   $$\rho_1\, V = \rho_0\, (V - V_é)$$

   L'équation d'équilibre prend ainsi la forme

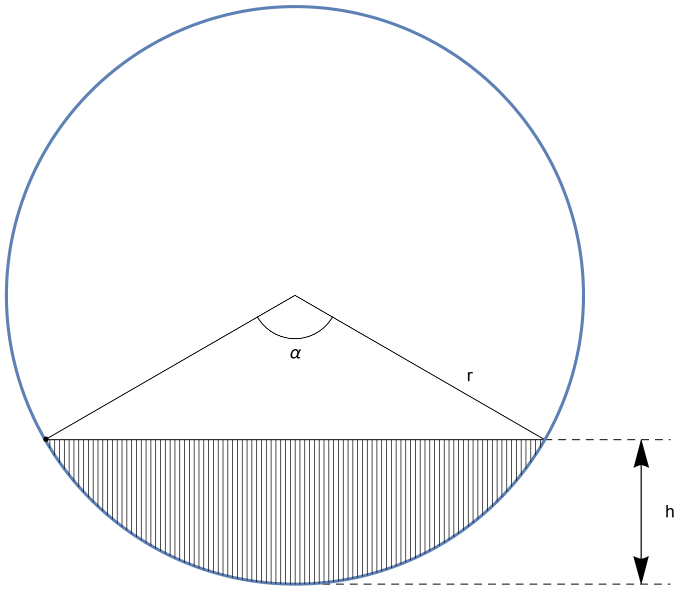
   $$\boxed{\rho_0\, V_é = (\rho_0 - \rho_1)\, V}$$

Problème 1 - P 4 [sans ordinateur]

Graduez une jauge pour une cuve cylindrique horizontale.



On connaît les dimensions de la cuve : son rayon *r* et sa longueur *L*.
Notons *c* sa capacité, *v* le volume de liquide que contient effectivement la cuve et $t = \frac{v}{c}$ son taux de remplissage (par exemple $t = 0.3$ signifie que la cuve est remplie à 30 %).



Sachant que la cuve a un taux de remplissage *t* donné, calculez la hauteur *h* du liquide (c'est-à-dire l'endroit où il faut écrire 30 % sur la jauge).

<u>Indication</u> : calculez d'abord l'angle au centre α.

Exercice 1 - P 5 [sans ordinateur]

On emprunte un montant c. La banque demande de verser n annuités a.
Calculez le taux d'intérêt i.

Commentaire

L'annuité est un montant constant a que le débiteur doit verser chaque année à la banque. Cette annuité a été calculée de manière que, après exactement n années, le débiteur ne doive plus rien à la banque. On applique le même taux d’intérêt à la dette et aux annuités, car elles sont dans un même compte.

Indications

Notations :

i	: taux annuel
$r = 1 + i$	: facteur de capitalisation
c	: dette contractée

Relation :

$$\begin{pmatrix} \text{valeur acquise par la dette} \\ \text{après n années} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{valeur acquise par les annuités} \\ \text{après n années} \end{pmatrix}$$

Pour écrire le résultat explicitement, c'est-à-dire sans y laisser des points de suspension, on fait appel au produit remarquable suivant (voir formulaire)

$$r^n - 1 = (r - 1)\left(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}\right)$$

duquel on tire

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Lien vers les corrigés des exercices

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/corriges/equations/1-equations-cor.pdf