Marcel Délèze
Edition 2017

Thème : Statistiques I, § 3 Distributions théoriques à une variable discrète
Lien vers les énoncés des exercices:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/statistique_1/3-stat_I.pdf

Packages de l'auteur

- On peut consulter le mode d'emploi du package **Statistique**:
  https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/packages/aide/Statistique.pdf
- Avant d'utiliser le package, il faut le charger en donnant son adresse web:

```
Needs["Statistique`",
nécessite
 "https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/packages/Statistique.m"]
```

Voici la liste des instructions disponibles :

```
Names["Statistique`*"]
noms
{amplitudes, densiteContinue, densites, diagrammeBatons,
 diagrammeCumulatif, distributionContinue, distributionLissee, fctDensite,
 fctFrequenceCumulee, frequenceCumuleeContinue, frequenceCumuleeLissee,
 histogramme, InterpolatedQuantile, noeudsPolygonaux, polygoneDeDensite,
 quantileC, quantileLisse, sommesCumulees, StandardDeviationMLE, VarianceMLE}
```

- Le package **Tableaux** contient des commandes qui facilitent la présentation des données et résultats sous la forme de tableaux:

```
Needs["Tableaux`",
nécessite
 "https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/packages/Tableaux.m"]
```

```
Names["Tableaux`*"]
noms
{afficheTableau, afficheTableauTitre, arrondis, fusionneColonnes,
 fusionneLignes, fusionneTableaux, prodCart, prodCartTrans, tableauGraph}
```

- On peut consulter le mode d'emploi du package **Tableaux**:
  https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/packages/aide/Tableaux.pdf

Pour ne pas oublier d'exécuter ces instructions au début de chaque session de travail, il est conseillé de déclarer les instructions **Needs** comme étant des cellules d'initialisation. Pour ce faire, sélectionnez les cellules voulues puis passez par le menu
Cell / Cell properties / Initialization cell

Corrigé de l'exercice 3.1 - 1 pour les valeurs empiriques

Remarquons d'abord que

$$0^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad 1^2 = 1$$

et ainsi

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \Longrightarrow \quad x_i^2 = x_i$$

Par suite,

$$m\left(x^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = m(x)$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2\,x_i\,m + m^2\right) =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-2\,x_i\,m) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - 2\,m\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m^2\right) =$$

$$m - 2\,m\,m + \frac{1}{n}\left(n\,m^2\right) = m - 2\,m^2 + m^2 = m - m^2 = m\,(1 - m)$$

Corrigé de l'exercice 3.1 - 1 pour les valeurs théoriques

Remarquons d'abord que

$$c_0^2 = 0^2 = 0 = c_0 \qquad \text{et} \qquad c_1^2 = 1^2 = 1 = c_1$$

Par suite,

$$E\left(X^2\right) = 0^2\,p_0 + 1^2\,p_1 = p_1 = E(X)$$

$$V(X) = (c_0 - E(X))^2\,p_0 + (c_1 - E(X))^2\,p_1 = (0 - E(X))^2\,p_0 + (1 - E(X))^2\,p_1 =$$

$$E^2(X)\,p_0 + \left(1 - 2\,E(X) + E^2(X)\right)p_1 = E^2(X)\,(p_0 + p_1) + p_1 - 2\,E(X)\,p_1 =$$

$$E^2(X) + E(X) - 2\,E(X)\,E(X) = E(X) - E^2(X) = E(X)\,(1 - E(X))$$

Corrigé de l'exercice 3.1 - 2

Le jet d'une pièce de monnaie correspond à une variable statistique de Bernoulli

$$X = \begin{cases} 0\ \text{face} & \text{avec la fréquence } f_0 = \frac{485}{1000} \\ 1\ \text{face} & \text{avec la fréquence } f_1 = \frac{515}{1000} \end{cases}$$

On est en présence d'un échantillon de taille $n = 1000$.

$$m = 0\,f_0 + 1\,f_1 = f_1 = \frac{515}{1000}$$

En vertu de l'exercice 3.1-1,

$$s = \sqrt{m\,(1 - m)} = \sqrt{0.515\,(1 - 0.515)} \simeq 0.499775$$

Corrigé de l'exercice 3.1 - 3 a) [Avec *Mathematica,* version 1]

```
n = 10000;
distr = UniformDistribution[{0, 1}];
        distribution uniforme
u = RandomReal[distr, n];
    nombre réel aléatoire

f[t_] := If[0.4 ≤ t < 0.6, 1, 0]
         si

x = Map[f, u];
    applique
```

```
m = Mean[x]; N[m]
```
valeur m··· valeur

0.1966

```
s = StandardDeviationMLE[x]; N[s]
```
valeur

0.397427

Corrigé de l'exercice 3.1 - 3 b) [Sans ordinateur]

$$\mu = E(X) = \frac{0.6 - 0.4}{1 - 0} = \frac{0.2}{1} = 0.2 \qquad (= p)$$

$$V(X) = \mu(1 - \mu) = 0.2 * 0.8 = 0.16 \qquad (= p\,q)$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.16} = 0.4 \qquad \left(= \sqrt{p\,q}\right)$$

Corrigé de l'exercice 3.1 - 3 a) [Avec *Mathematica,* version 2]

```
n = 10000;
distr = BernoulliDistribution[1/5];
```
distribution de Bernoulli

```
x = RandomInteger[distr, n];
```
entier aléatoire

```
m = Mean[x]; N[m]
```
valeur m··· valeur

0.2018

```
s = StandardDeviationMLE[x]; N[s]
```
valeur

0.401344

Corrigé de l'exercice 3.2 - 1

<u>Pour la variable aléatoire X</u>

Voir cours § 3.2

$$x_0 = 0, \qquad p_0 = \frac{125}{216}$$

$$x_1 = 1, \qquad p_1 = \frac{75}{216} = \frac{25}{72}$$

$$x_2 = 2, \qquad p_2 = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$$

$$x_3 = 3, \qquad p_3 = \frac{1}{216}$$

$$E(X) = x_0\,p_0 + x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + x_3\,p_3 = 0 + \frac{75}{216} + 2\,\frac{15}{216} + 3\,\frac{1}{216} = \frac{1}{2} = \mu$$

$$V(X) = (x_0 - \mu)^2\,p_0 + (x_1 - \mu)^2\,p_1 + (x_2 - \mu)^2\,p_2 + (x_3 - \mu)^2\,p_3 =$$

$$\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{125}{216} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{75}{216} + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{15}{216} + \left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{216} = \frac{5}{12}$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5}{12}} \simeq 0.645497$$

<u>Pour la variable aléatoire Z</u>

$$z_0 = 0 * 6 - 7 = -7, \qquad p_0 = \frac{125}{216}$$

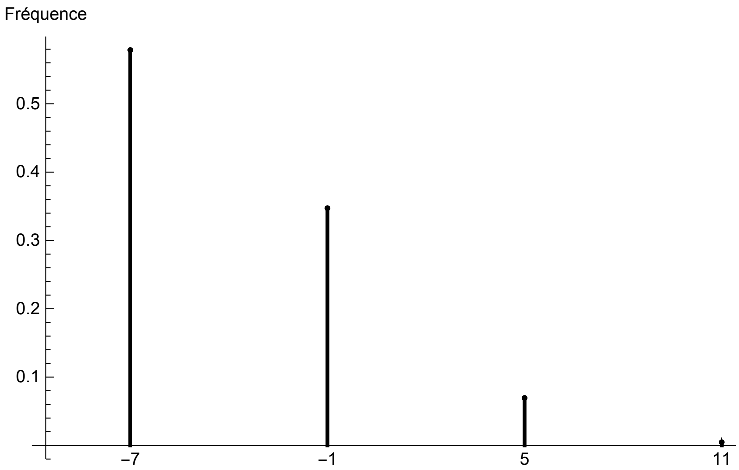
$$z_1 = 1 * 6 - 7 = -1, \qquad p_1 = \frac{75}{216} = \frac{25}{72}$$

$$z_2 = 2 * 6 - 7 = 5, \qquad p_2 = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$$

$$z_3 = 3 * 6 - 7 = 11, \qquad p_3 = \frac{1}{216}$$

```
c = {-7, -1, 5, 11}; freq = {125/216, 75/216, 15/216, 1/216};
diagrammeBatons[c, freq, AxesLabel → {None, "Fréquence"}]
```

titre d'axe aucun



$$E(Z) = z_0\, p_0 + z_1\, p_1 + z_2\, p_2 + z_3\, p_3 = (-7)\frac{125}{216} + (-1)\frac{75}{216} + 5\frac{15}{216} + 11\frac{1}{216} = -4$$

$$V(Z) = (z_0 - \mu)^2 p_0 + (z_1 - \mu)^2 p_1 + (z_2 - \mu)^2 p_2 + (z_3 - \mu)^2 p_3 =$$

$$(-7+4)^2 \frac{125}{216} + (-1+4)^2 \frac{75}{216} + (5+4)^2 \frac{15}{216} + (11+4)^2 \frac{1}{216} = 15$$

$$\sigma_Z = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{15} \simeq 3.87298$$

Corrigé de l'exercice 3.2 - 2

Une expérience consiste à lancer 3 fois le dé et à compter le nombre de "six". Comment les résultats dépendent-ils du nombre d'expériences réalisées ? Organisons une série de simulations

une 1-ère simulation de 1 expérience,
une 2-ème simulation de 10 expériences,
une 3-ème simulation de 100 expériences,
une 4-ème simulation de 1'000 expériences,
une 5-ème simulation de 10'000 expériences,
une 6-ème simulation de 100'000 expériences

et calculons à chaque fois les fréquences de 0, de 1 de 2 et de 3.

```
de3 = BinomialDistribution[3, 1/6];
```
distribution binomiale

```
Clear[freq];
```
efface

```
freq[n_] := Map[Count[RandomInteger[de3, n], #] &, {0, 1, 2, 3}] / n
```

```
tabelle = Table[freq[10^t], {t, 0, 5}]
```
table

$$\left\{\{0, 1, 0, 0\}, \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, 0\right\}, \left\{\frac{57}{100}, \frac{13}{50}, \frac{3}{100}, \frac{1}{100}\right\}, \left\{\frac{297}{500}, \frac{89}{250}, \frac{77}{1000}, \frac{1}{250}\right\}, \left\{\frac{2931}{5000}, \frac{3469}{10\,000}, \frac{703}{10\,000}, \frac{49}{10\,000}\right\}, \left\{\frac{57\,921}{100\,000}, \frac{4317}{12\,500}, \frac{277}{4000}, \frac{481}{100\,000}\right\}\right\}$$

```
afficheTableau[{1, 10, 100, 1000, 10000, 100000}, {"Fréquence\nde 0 six",
  "Fréquence\nde 1 six", "Fréquence\nde 2 six", "Fréquence\nde 3 six"}, N[tabelle]]
```
valeur numérique

	Fréquence de 0 six	*Fréquence de 1 six*	*Fréquence de 2 six*	*Fréquence de 3 six*
1	0.	1.	0.	0.
10	0.5	0.5	0.1	0.
100	0.57	0.26	0.03	0.01
1000	0.594	0.356	0.077	0.004
10 000	0.5862	0.3469	0.0703	0.0049
100 000	0.57921	0.34536	0.06925	0.00481

Comparons les fréquences avec les probabilités.

```
afficheTableau[None, {"Probabilité\nde 0 six", "Probabilité\nde 1 six",
  "Probabilité\nde 2 six", "Probabilité\nde 3 six"}, N[{{125/216, 75/216, 15/216, 1/216}}]]
```
aucun

valeur numérique

Probabilité de 0 six	*Probabilité de 1 six*	*Probabilité de 2 six*	*Probabilité de 3 six*
0.578704	0.347222	0.0694444	0.00462963

On peut observer que, lorsque le nombre d'expériences est faible, il peut y avoir d'importantes différences entre les fréquences empiriques et les probabilités. Par contre, quand le nombre d'expériences est élevé, les fréquences empiriques sont assez proches des probabilités. La loi des grands nombres de Bernoulli affirme que

Dans une série d'épreuves indépendantes, si le nombre d'expériences *n* tend vers l'infini, alors la suite des fréquences empiriques f_n converge en probabilité vers la probabilité *p*.

L'expression "converge en probabilité" signifie que, pour n'importe quel petit nombre positif ϵ (par exemple $\epsilon = 0.01$), la probabilité que l'erreur dépasse ϵ

$$P\{\,|f_n - p| > \epsilon\}$$

tend vers 0 lorsque *n* tend vers l'infini.

La loi des grands nombres justifie la pratique qui consiste, lorsque la probabilité est inconnue et que la taille de l'échantillon est assez grande, d'utiliser la fréquence empirique comme estimateur de la probabilité

$$\hat{p} = f_n$$

Corrigé de l'exercice 3.2 - 3

```
distr = BinomialDistribution[500, 1/2];
        distribution binomiale
```

Première méthode

L'événement peut être décomposé en événements élémentaires

$$P[240 \le X \le 260] = P[X = 240] + P[X = 241] + ... + P[X = 260]$$

Les probabilités des événements élémentaires peuvent être calculées comme suit :

```
Clear[x];
efface
pi = Table[PDF[distr, x], {x, 240, 260}]; N[pi]
     table fonction de densité de probabilité    valeur n
```

```
{0.0239233, 0.0258094, 0.0276224, 0.0293275, 0.03089, 0.0322769, 0.0334578,
 0.034406, 0.0350997, 0.0355226, 0.0356646, 0.0355226, 0.0350997, 0.034406,
 0.0334578, 0.0322769, 0.03089, 0.0293275, 0.0276224, 0.0258094, 0.0239233}
```

dont la somme est

```
p = Apply[Plus, pi]; N[p]
    remp··· plus      valeur
```

```
0.652336
```

Deuxième méthode (méthode conseillée)

La probabilité de l'événement peut se calculer au moyen de la fonction de distribution

$$P[240 \le X \le 260] = P[-\infty < X \le 260] - P[-\infty < X \le 239] = F(260) - F(239)$$

La différence entre deux valeurs de la fonction de distribution se calcule comme suit

```
p = N[CDF[distr, 260] - CDF[distr, 239]]
    ·· fonction de distributio·· fonction de distribution
```

```
0.652336
```

Troisième méthode

Dans le § 4, nous verrons que l'on peut approximer la distribution binomiale par une distribution normale
(voir exercice 4.2 - 7).

Corrigé de l'exercice 3.3 - 1 a)

Paramètres théoriques

$$x_0 = 0, \qquad p_0 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 1, \qquad p_1 = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = x_0 p_0 + x_1 p_1 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \mu$$

$$V(X) = (x_0-\mu)^2 p_0 + (x_1-\mu)^2 p_1 = \left(0-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{2}$$

Paramètres empiriques

```
distr = BernoulliDistribution[1/2];
        distribution de Bernoulli
```

```
n = 100 000;
```

```
x = RandomInteger[distr, n];
    entier aléatoire
```

```
m = Mean[x]; N[m]
    valeur m··· valeur
```

```
0.49784
```

```
s = StandardDeviationMLE[x]; N[s]
                             valeur
```

```
0.499995
```

Corrigé de l'exercice 3.3 - 1 b)

Paramètres théoriques

$$x_0 = 0, \quad p_0 = \frac{5}{6}$$

$$x_1 = 1, \quad p_1 = \frac{1}{6}$$

$$E(X) = x_0 p_0 + x_1 p_1 = 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} = \mu \simeq 0.166667$$

$$V(X) = (x_0-\mu)^2 p_0 + (x_1-\mu)^2 p_1 = \left(0-\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6} + \left(1-\frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{5}}{6} \simeq 0.372678$$

Paramètres empiriques

```
distr = BernoulliDistribution[1/6];
        distribution de Bernoulli
```

```
n = 100 000;
```

```
x = RandomInteger[distr, n];
    entier aléatoire
```

```
m = Mean[x]; N[m]
    valeur m··· valeur
```

```
0.16655
```

```
s = StandardDeviationMLE[x]; N[s]
                               valeur
```

```
0.372574
```

Corrigé de l'exercice 3.3 - 1 c)

Paramètres théoriques

$$x_0 = 0, \quad p_0 = 0.6$$

$$x_1 = 1, \quad p_1 = 0.3$$

$$x_2 = 2, \quad p_2 = 0.1$$

$$E(X) = x_0 p_0 + x_1 p_1 + x_2 p_2 = 0 + 0.3 + 0.2 = 0.5 = \mu$$

$$V(X) = (x_0 - \mu)^2 p_0 + (x_1 - \mu)^2 p_1 = (0 - 0.5)^2 0.6 + (1 - 0.5)^2 0.3 + (2 - 0.5)^2 0.1 = 0.25$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} \simeq 0.67082$$

Paramètres empiriques

```
unif = UniformDistribution[{0, 1}];
       distribution uniforme
```

```
n = 100 000;
```

```
e = RandomReal[unif, n]
    nombre réel aléatoire
```

```
{0.239023, 0.103019, 0.156038, 0.807168, 0.846808, 0.161114, 0.766056, 0.482203,
 0.120409, 0.452863, 0.256692, 0.487204, 0.563821, 0.80965, ··· 99 972 ···,
 0.285543, 0.659905, 0.412226, 0.426463, 0.809274, 0.669663, 0.958918,
 0.100883, 0.696418, 0.890751, 0.460275, 0.0879103, 0.218905, 0.777973}

large output | show less | show more | show all | set size limit...
```

```
Clear[f]; f[t_] := Which[t < 0.6, 0,
efface             quel
  t < 0.9, 1,
  True, 2]
  vrai
```

```
x = Map[f, e]
```
applique

```
{0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 2, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0,
 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0,
 2, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 2, 1, 0, 0, 1,
 2, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 2, … 99704 …, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1,
 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 2, 1, 1, 2, 0,
 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 0,
 2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1,
 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 2, 0, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 0,
 0, 2, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1}
```

large output | show less | show more | show all | set size limit...

```
m = Mean[x]; N[m]
```
valeur m··· valeur

```
0.50168
```

```
s = StandardDeviationMLE[x]; N[s]
```
valeur

```
0.672471
```

Corrigé de l'exercice 3.3 - 2

Paramètres empiriques

```
jets = GeometricDistribution[1/6];
```
distribution géométrique

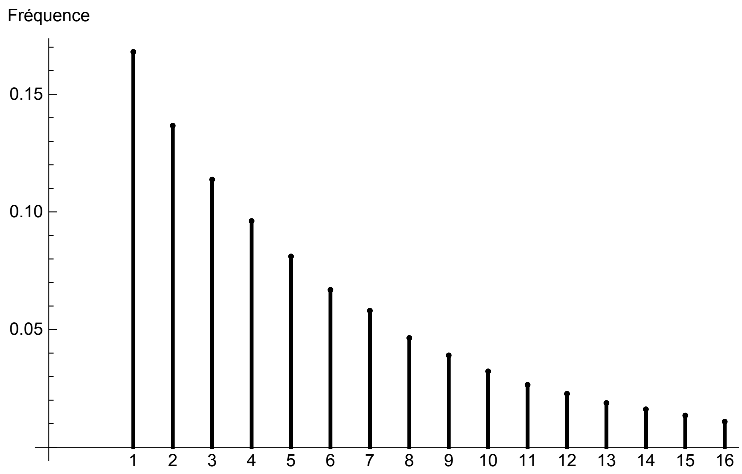
```
n = 100000;
```

```
x = 1 + RandomInteger[jets, n];
```
entier aléatoire

```
eff = Map[Count[x, #] &, Range[1, 16]]
```
app· compte plage

```
{16800, 13665, 11374, 9614, 8107, 6688, 5800,
 4643, 3903, 3224, 2653, 2271, 1880, 1613, 1347, 1087}
```

```
diagrammeBatons[Range[1, 16], eff/n, AxesLabel → {None, "Fréquence"}]
                 plage                titre d'axe    aucun
```




```
m = Mean[x]; N[m]
     valeur m··· valeur
```

```
6.01324
```

```
s = StandardDeviationMLE[x]; N[s]
                             valeur
```

```
5.48907
```

Paramètres théoriques

```
μ = 6
```

```
6
```

```
s = √30 ; N[s]
          valeur
```

```
5.47723
```

Corrigé de l'exercice 3.3 - 3

Paramètres théoriques

```
k = 2000; p = 0.001; λ = k p
```

```
2.
```

```
pois = PoissonDistribution[λ];
       distribution Poisson
```

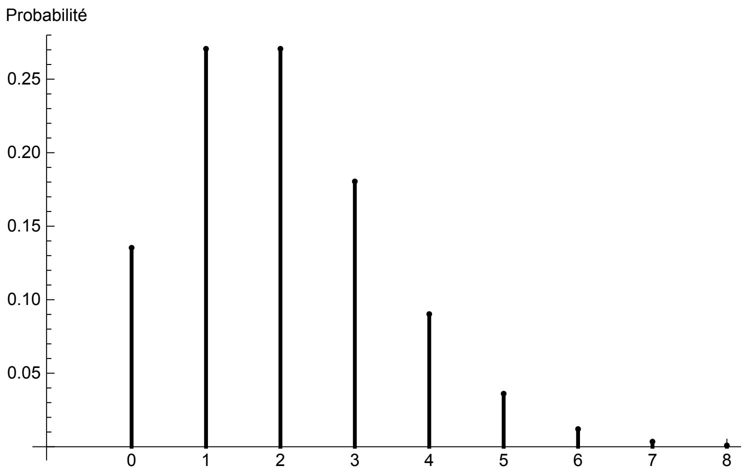
Probabilités approximées par une distribution de Poisson

```
Clear[x];
efface
```

```
pi = Table[PDF[pois, x], {x, 0, 8}]
     table  fonction de densité de probabilité
```

```
{0.135335, 0.270671, 0.270671, 0.180447,
 0.0902235, 0.0360894, 0.0120298, 0.00343709, 0.000859272}
```

```
diagrammeBatons[Range[0, 8], pi, AxesLabel → "Probabilité"]
```
plage titre d'axe



Première méthode

On considère l'événement complémentaire qu'on décompose en événements élémentaires

$$p = P[X > 2] = 1 - P[X \leq 2] =$$
$$1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2] = 1 - 0.135335 - 0.270671 - 0.270671 \simeq 0.323324$$

Deuxième méthode (méthode conseillée)

On considère l'événement complémentaire dont on calcule la probabilité avec la fonction de distribution

$$P[X > 2] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - F[2]$$

```
p = 1 - CDF[pois, 2]
```
fonction de distrib

```
0.323324
```

Corrigé de l'exercice 3.4 - 1

Considérons l'échantillon suivant dont les éléments sont des nombres de bouteilles achetées par des clients

$$x = \{24, 6, 12, 2\};$$

Calculons la moyenne et la variance

$$m(x) = \frac{24 + 6 + 12 + 2}{4} = 11$$

$$v(x) = \frac{(24 - 11)^2 + (6 - 11)^2 + (12 - 11)^2 + (2 - 11)^2}{4} = 69$$

Considérons maintenant le nouvel échantillon dont les éléments sont les prix des achats correspondants:

$$y = 7x + 3 = \{171, 45, 87, 17\};$$

Calculons la moyenne et la variance de l'échantillon *y*:

$$m(y) = \frac{171 + 45 + 87 + 17}{4} = 80$$

$$v(y) = \frac{(171 - 80)^2 + (45 - 80)^2 + (87 - 80)^2 + (17 - 80)^2}{4} = 3381$$

A titre de comparaison, formons les expressions basées sur l'échantillon *x* :

$$7\,m\,(x) + 3 = 7 * 11 + 3 = 80$$

$$7\,v\,(x) + 3 = 7 * 69 + 3 = 486$$

Comparons ces expressions avec l'échantillon *y* :

$$7\,m\,(x) + 3 = 80 = m\,(y) = m\,(7\,x + 3)$$

$$7\,v\,(x) + 3 = 486 \neq 3381 = v\,(y) = v\,(7\,x + 3)$$

Il faut comparer $v(y)$ à

$$v\,(y) = v\,(7\,x + 3) = 7^2\,v\,(x) = 49 * 69 = 3381$$

Corrigé de l'exercice 3.4 - 2

On a mesuré les durées de vie d'un lot d'ampoules électriques. Les valeurs ont été arrondies à l'entier. Voici la liste des observations faites:

```
x = {1412, 1466, 1826, 1779, 1320, 1327, 1970, 1715, 1920, 1600, 1140, 1994, 2007, 1726,
   1576, 1490, 1376, 1630, 1358, 1729, 1169, 2010, 1520, 1552, 1715, 1276, 1083, 1648,
   1943, 2154, 1379, 1701, 1779, 1949, 1933, 1744, 2068, 2164, 1453, 1827, 1362,
   1304, 2281, 1283, 1629, 2141, 1365, 2158, 1412, 1682, 1674, 1550, 1544, 1905,
   1290, 1977, 2079, 2041, 1530, 1857, 2341, 1528, 2372, 1388, 1494, 1853, 1681,
   1639, 1954, 1826, 1579, 1461, 1448, 1450, 1734, 1525, 1309, 2254, 1335, 1629,
   1658, 1734, 1683, 1752, 1649, 1780, 1645, 1786, 2055, 1294, 1669, 1772, 1711,
   1415, 884, 1613, 1930, 2298, 1235, 1212, 1661, 1591, 1859, 1870, 1195, 1035, 1898,
   1532, 1136, 1906, 1575, 1417, 1561, 1619, 1477, 1627, 1528, 1124, 1812, 1629};
```

Cet échantillon est à interpréter comme suit :

l'ampoule numéro 1 a une durée de vie de 1412 h,
l'ampoule numéro 2 a une durée de vie de 1466 h,
etc.

```
y = 0.06 x
```

```
{84.72, 87.96, 109.56, 106.74, 79.2, 79.62, 118.2, 102.9, 115.2, 96., 68.4,
 119.64, 120.42, 103.56, 94.56, 89.4, 82.56, 97.8, 81.48, 103.74, 70.14, 120.6,
 91.2, 93.12, 102.9, 76.56, 64.98, 98.88, 116.58, 129.24, 82.74, 102.06, 106.74,
 116.94, 115.98, 104.64, 124.08, 129.84, 87.18, 109.62, 81.72, 78.24, 136.86,
 76.98, 97.74, 128.46, 81.9, 129.48, 84.72, 100.92, 100.44, 93., 92.64, 114.3,
 77.4, 118.62, 124.74, 122.46, 91.8, 111.42, 140.46, 91.68, 142.32, 83.28, 89.64,
 111.18, 100.86, 98.34, 117.24, 109.56, 94.74, 87.66, 86.88, 87., 104.04, 91.5,
 78.54, 135.24, 80.1, 97.74, 99.48, 104.04, 100.98, 105.12, 98.94, 106.8, 98.7,
 107.16, 123.3, 77.64, 100.14, 106.32, 102.66, 84.9, 53.04, 96.78, 115.8, 137.88,
 74.1, 72.72, 99.66, 95.46, 111.54, 112.2, 71.7, 62.1, 113.88, 91.92, 68.16,
 114.36, 94.5, 85.02, 93.66, 97.14, 88.62, 97.62, 91.68, 67.44, 108.72, 97.74}
```

```
mx = Mean[x]; N[mx]
```

valeur m··· valeur r

```
1650.99
```

```
sx = StandardDeviationMLE[x]; N[sx]
```

valeur n

```
298.299
```

```
my = Mean[y]; N[my]
     valeur m···  valeur r
```

99.0595

```
sy = StandardDeviationMLE[y]; N[sy]
                               valeur n
```

17.8979

Comparaisons

```
N[0.06 mx]
valeur numérique
```

99.0595

```
N[0.06 sx]
valeur numérique
```

17.8979

Corrigé de l'exercice 3.4 - 3

Données

$$E(\text{jets}) = 5$$

$$V(\text{jets}) = 30$$

$$X = 1 + \text{jets}$$

Calculs

$$\mu_X = E(X) = E(1 + \text{jets}) = 1 + E(\text{jets}) = 1 + 5 = 6$$

$$V(X) = V(1 + \text{jets}) = V(\text{jets}) = 30$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{30} \simeq 5.47723$$

Corrigé de l'exercice 3.4 - 4

Échantillons

$$x = \{24, 6, 12, 2\}$$

$$x^2 = \{24^2, 6^2, 12^2, 2^2\} = \{576, 36, 144, 4\}$$

$$m(x) = \frac{24 + 6 + 12 + 2}{4} = 11$$

$$x - m(x) = \{24, 6, 12, 2\} - 11 = \{24 - 11, 6 - 11, 12 - 11, 2 - 11\} = \{13, -5, 1, -9\}$$

$$(x - m(x))^2 = \{13^2, (-5)^2, 1^2, (-9)^2\} = \{169, 25, 1, 81\}$$

Calculs

$$s^2(x) = v(x) = \frac{1}{4}\left((24 - 11)^2 + (6 - 11)^2 + (12 - 11)^2 + (2 - 11)^2\right) = 69$$

$$m\left((x - m(x))^2\right) = m(\{169, 25, 1, 81\}) = \frac{169 + 25 + 1 + 81}{4} = 69$$

$$m\left(x^2\right) - (m(x))^2 = m(\{576, 36, 144, 4\}) - 11^2 = \frac{576 + 36 + 144 + 4}{4} - 121 = 69$$

Relations vérifiées

$$s^2(x) = v(x) = m\left((x - m(x))^2\right) = m\left(x^2\right) - (m(x))^2$$

Corrigé de l'exercice 3.4 - 5

On a mesuré les durées de vie d'un lot d'ampoules électriques. Les valeurs ont été arrondies à l'entier. Voici la liste des observations faites:

```
x = {1412, 1466, 1826, 1779, 1320, 1327, 1970, 1715, 1920, 1600, 1140, 1994, 2007, 1726,
   1576, 1490, 1376, 1630, 1358, 1729, 1169, 2010, 1520, 1552, 1715, 1276, 1083, 1648,
   1943, 2154, 1379, 1701, 1779, 1949, 1933, 1744, 2068, 2164, 1453, 1827, 1362,
   1304, 2281, 1283, 1629, 2141, 1365, 2158, 1412, 1682, 1674, 1550, 1544, 1905,
   1290, 1977, 2079, 2041, 1530, 1857, 2341, 1528, 2372, 1388, 1494, 1853, 1681,
   1639, 1954, 1826, 1579, 1461, 1448, 1450, 1734, 1525, 1309, 2254, 1335, 1629,
   1658, 1734, 1683, 1752, 1649, 1780, 1645, 1786, 2055, 1294, 1669, 1772, 1711,
   1415, 884, 1613, 1930, 2298, 1235, 1212, 1661, 1591, 1859, 1870, 1195, 1035, 1898,
   1532, 1136, 1906, 1575, 1417, 1561, 1619, 1477, 1627, 1528, 1124, 1812, 1629};
```

Cet échantillon est à interpréter comme suit :

l'ampoule numéro 1 a une durée de vie de 1412 h,
l'ampoule numéro 2 a une durée de vie de 1466 h,
etc.

Calculs de deux expressions à bien distinguer

```
Mean[x^2]
```
valeur moyenne

$$\frac{22\,518\,047}{8}$$

```
Mean[x]^2
```

$$\frac{39\,251\,138\,161}{14\,400}$$

Comparaison

```
VarianceMLE[x]
```

$$\frac{1\,281\,346\,439}{14\,400}$$

```
Mean[x^2] - (Mean[x])^2
```
valeur moyenne

$$\frac{1\,281\,346\,439}{14\,400}$$

Relations vérifiées

$$s^2(x) = v(x) = m\left(x^2\right) - m^2(x)$$

Corrigé de l'exercice 3.4 - 6 a)

Les gains bruts sont

8 Fr	avec la probabilité $p_1 = \frac{1}{2}$
1 Fr	avec la probabilité $p_2 = \frac{1}{2}$

On obtient les gains nets en soustrayant la mise de 5 Fr

$a_1 = 3$ Fr avec la probabilité $p_1 = \frac{1}{2}$

$a_2 = -4$ Fr avec la probabilité $p_2 = \frac{1}{2}$

L'espérance mathématique de A est

$$\mu_A = E(A) = a_1 p_1 + a_2 p_2 = 3\,\text{Fr}\,\frac{1}{2} + (-4\,\text{Fr})\,\frac{1}{2} = -0.5\,\text{Fr}$$

La variance de A est

$$V(A) = (a_1 - \mu)^2 p_1 + (a_2 - \mu)^2 p_2 = \left(3\,\text{Fr} + \frac{1}{2}\,\text{Fr}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(-4\,\text{Fr} + \frac{1}{2}\,\text{Fr}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{49}{4}\,\text{Fr}^2$$

et l'écart-type de A

$$\sigma_A = \sqrt{V(A)} = \frac{7}{2}\,\text{Fr}$$

Corrigé de l'exercice 3.4 - 6 b)

Le gain brut d'une partie est

2 Fr avec la probabilité $p_1 = \frac{1}{6}$

4 Fr avec la probabilité $p_2 = \frac{1}{6}$

6 Fr avec la probabilité $p_3 = \frac{1}{6}$

8 Fr avec la probabilité $p_4 = \frac{1}{6}$

10 Fr avec la probabilité $p_5 = \frac{1}{6}$

12 Fr avec la probabilité $p_6 = \frac{1}{6}$

On obtient les gains nets en soustrayant la mise de 8 Fr

$b_1 = -6$ Fr avec la probabilité $p_1 = \frac{1}{6}$

$b_2 = -4$ Fr avec la probabilité $p_2 = \frac{1}{6}$

$b_3 = -2$ Fr avec la probabilité $p_3 = \frac{1}{6}$

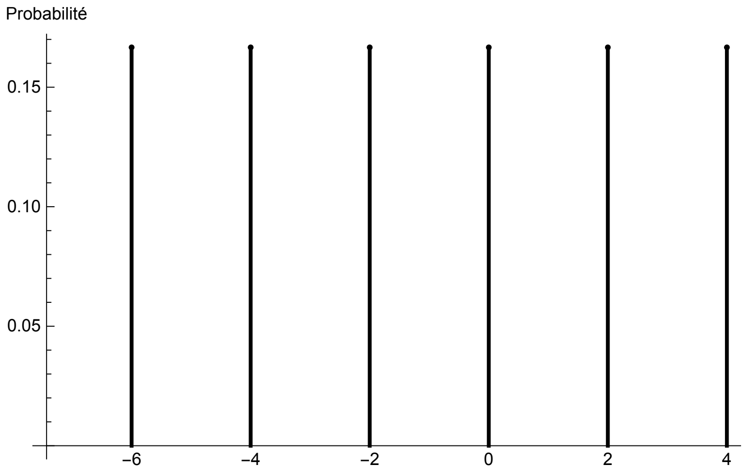
$b_4 = 0$ avec la probabilité $p_4 = \frac{1}{6}$

$b_5 = 2$ Fr avec la probabilité $p_5 = \frac{1}{6}$

$b_6 = 4$ Fr avec la probabilité $p_6 = \frac{1}{6}$

Le diagramme à bâtons des probabilités de la variable aléatoire B est

```
c = {-6, -4, -2, 0, 2, 4}; freq = {1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6};
diagrammeBatons[c, freq, AxesLabel → {None, "Probabilité"}]
```
titre d'axe aucun



Espérance mathématique de B

$$\mu_B = E(B) = b_1 p_1 + b_2 p_2 + ... + b_6 p_6 =$$
$$(-6\,\text{Fr})\frac{1}{6} + (-4\,\text{Fr})\frac{1}{6} + (-2\,\text{Fr})\frac{1}{6} + (0\,\text{Fr})\frac{1}{6} + (2\,\text{Fr})\frac{1}{6} + (4\,\text{Fr})\frac{1}{6} = -1\,\text{Fr}$$

Variance de B

$$V(B) = (b_1 - \mu_B)^2 p_1 + (b_2 - \mu_B)^2 p_2 + ... + (b_6 - \mu_B)^2 p_6 =$$
$$(-6\,\text{Fr} + 1\,\text{Fr})^2 \frac{1}{6} + (-4\,\text{Fr} + 1\,\text{Fr})^2 \frac{1}{6} + (-2\,\text{Fr} + 1\,\text{Fr})^2 \frac{1}{6} + (0 + 1\,\text{Fr})^2 \frac{1}{6} +$$
$$(2\,\text{Fr} + 1\,\text{Fr})^2 \frac{1}{6} + (4\,\text{Fr} + 1\,\text{Fr})^2 \frac{1}{6}) = \frac{35\,\text{Fr}^2}{3} \simeq 11.6667\,\text{Fr}^2$$

Ecart-type théorique de B

$$\sigma_B = \sqrt{V(B)} = \sqrt{\frac{35\,\text{Fr}^2}{3}} \approx 3.41565\,\text{Fr}$$

Espérance mathématique de B^2

$$E(B^2) = b_1^2 p_1 + b_2^2 p_2 + ... + b_6^2 p_6 =$$
$$(-6\,\text{Fr})^2 \frac{1}{6} + (-4\,\text{Fr})^2 \frac{1}{6} + (-2\,\text{Fr})^2 \frac{1}{6} + (0\,\text{Fr})^2 \frac{1}{6} + (2\,\text{Fr})^2 \frac{1}{6} + (4\,\text{Fr})^2 \frac{1}{6} = \frac{38\,\text{Fr}^2}{3}$$

La variable $(B - E(B))^2$ se présente comme suit

$(b_1 - \mu_B)^2 = (-6\,\text{Fr} + 1\,\text{Fr})^2 = 25\,\text{Fr}^2$ avec la probabilité $p_1 = \frac{1}{6}$

$(b_2 - \mu_B)^2 = (-4\,\text{Fr} + 1\,\text{Fr})^2 = 9\,\text{Fr}^2$ avec la probabilité $p_2 = \frac{1}{6}$

$(b_3 - \mu_B)^2 = (-2\,\text{Fr} + 1\,\text{Fr})^2 = 1\,\text{Fr}^2$ avec la probabilité $p_3 = \frac{1}{6}$

$(b_4 - \mu_B)^2 = (0 + 1\,\text{Fr})^2 = 1\,\text{Fr}^2$ avec la probabilité $p_4 = \frac{1}{6}$

$(b_5 - \mu_B)^2 = (2\,\text{Fr} + 1\,\text{Fr})^2 = 9\,\text{Fr}^2$ avec la probabilité $p_5 = \frac{1}{6}$

$(b_6 - \mu_B)^2 = (4\,\text{Fr} + 1\,\text{Fr})^2 = 25\,\text{Fr}^2$ avec la probabilité $p_6 = \frac{1}{6}$

L'espérance mathématique de la variable $(B - E(B))^2$ est

$$E\left((B-E(B))^2\right) = 25\,\mathrm{Fr}^2\,\frac{1}{6} + 9\,\mathrm{Fr}^2\,\frac{1}{6} + 1\,\mathrm{Fr}^2\,\frac{1}{6} + 1\,\mathrm{Fr}^2\,\frac{1}{6} + 9\,\mathrm{Fr}^2\,\frac{1}{6} + 25\,\mathrm{Fr}^2\,\frac{1}{6} = \frac{35\,\mathrm{Fr}^2}{3}$$

Par ailleurs,

$$E\left(B^2\right) - (E(B))^2 = \frac{38\,\mathrm{Fr}^2}{3} - (-1\,\mathrm{Fr})^2 = \frac{35\,\mathrm{Fr}^2}{3}$$

On a les relations

$$\boxed{V(B) = \sigma_B^2 = E\left((B-E(B))^2\right) = E\left(B^2\right) - (E(B))^2}$$