Marcel Délèze
Edition 2017

Thème: Différentielles

Lien vers les énoncés des exercices :
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/plusieurs-variables/4_et_5_DIFFERENTIELLES.pdf

Corrigé de l'exercice 4-1

Fonction

$$\boxed{E(m,\ v) = \frac{1}{2}\, m\, v^2}$$

Dérivées partielles

$$\frac{\partial E(m,\ v)}{\partial m} = \frac{1}{2} v^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial E\left(2\,\text{kg},\ 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{\partial m} = \frac{1}{2}\left(5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = \frac{25}{2}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$\frac{\partial E(m,\ v)}{\partial v} = m\, v \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial E\left(2\,\text{kg},\ 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{\partial v} = 2\,\text{kg}\left(5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 10\,\frac{\text{kg}\,\text{m}}{\text{s}}$$

Différentielles partielles dE

$$\frac{\partial E(m,\ v)}{\partial m}\,\Delta m = \frac{1}{2} v^2\,\Delta m$$

$$\frac{\partial E\left(2\,\text{kg},\ 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{\partial m}\,\Delta m = \frac{1}{2}\left(5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\Delta m = \frac{25}{2}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\,\Delta m$$

$$\frac{\partial E(m,\ v)}{\partial v}\,\Delta v = m\, v\,\Delta v$$

$$\frac{\partial E\left(2\,\text{kg},\ 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{\partial v}\,\Delta v = 2\,\text{kg}\left(5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\Delta v = 10\,\frac{\text{kg}\,\text{m}}{\text{s}}\,\Delta v$$

Accroissements partiels approximés par les différentielles partielles ΔE ≈ dE

(le résultat est exprimé en joules)

$$\frac{1}{2}(m + \Delta m)\, v^2 - \frac{1}{2} m\, v^2 \approx \frac{\partial E(m,\ v)}{\partial m}\,\Delta m = \frac{1}{2} v^2\,\Delta m = \frac{1}{2}\left(5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 (0.1\,\text{kg}) = 1.25\,\frac{\text{m}^2\,\text{kg}}{\text{s}^2} = 1.25\ \text{J}$$

$$\frac{1}{2} m\,(v + \Delta v)^2 - \frac{1}{2} m\, v^2 \approx \frac{\partial E(m,\ v)}{\partial v}\,\Delta v = m\, v\,\Delta v = (2\,\text{kg})\left(5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\left(0.2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 2\,\frac{\text{kg}\,\text{m}^2}{\text{s}^2} = 2\ \text{J}$$

Printed by Wolfram Mathematica Student Edition

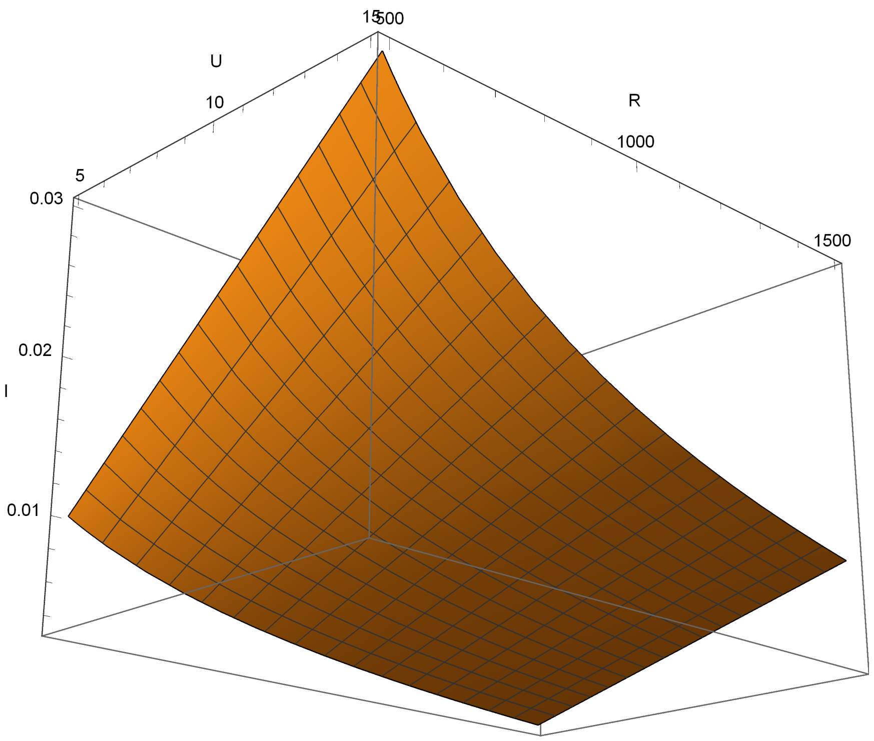
Corrigé de l'exercice 4-2

Fonction et graphique (vue depuis dessous la surface)

$$\boxed{I\ (U,\ R)\ =\ \frac{U}{R}}$$

```
Plot3D[u/r, {u, 5, 15}, {r, 500, 1500}, AxesLabel → {"U", "R", "I"},
BoxRatios → {2, 3, 2}, ViewPoint → {2, -2, -1}, ImageSize → {450, 450}]
```

tracé de surfaces · titre d'axe · unité imaginair · rapports de boîte · point de vue spatial · taille d'image



Calculs des dérivées partielles et différentielles partielles

$$\frac{\partial I\ (U,\ R)}{\partial U} = \frac{1}{R} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial I\ (10\,V,\ 1000\,\Omega)}{\partial U} = \frac{1}{1000\,\Omega}$$

$$\Delta U \mapsto \frac{\partial I\ (U,\ R)}{\partial U}\,\Delta U = \frac{\Delta U}{R} \quad \Longrightarrow \quad \Delta U \mapsto \frac{\partial I\ (10\,V,\ 1000\,\Omega)}{\partial U}\,\Delta U = \frac{\Delta U}{1000\,\Omega}$$

$$\frac{\partial I\ (U,\ R)}{\partial R} = \frac{-U}{R^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial I\ (10\,V,\ 1000\,\Omega)}{\partial R} = \frac{-10\,V}{(1000\,\Omega)^2} = -10^{-5}\,\frac{V}{\Omega^2}$$

$$\Delta R \mapsto \frac{\partial I\ (U,\ R)}{\partial R}\,\Delta R = \frac{-U\,\Delta R}{R^2} \quad \Longrightarrow \quad \Delta R \mapsto \frac{\partial I\ (10\,V,\ 1000\,\Omega)}{\partial R}\,\Delta R = -10^{-5}\,\frac{V}{\Omega^2}\,\Delta R$$

Noms

différentielle partielle de *I* par rapport à *U* en (10 V, 1000 Ω)

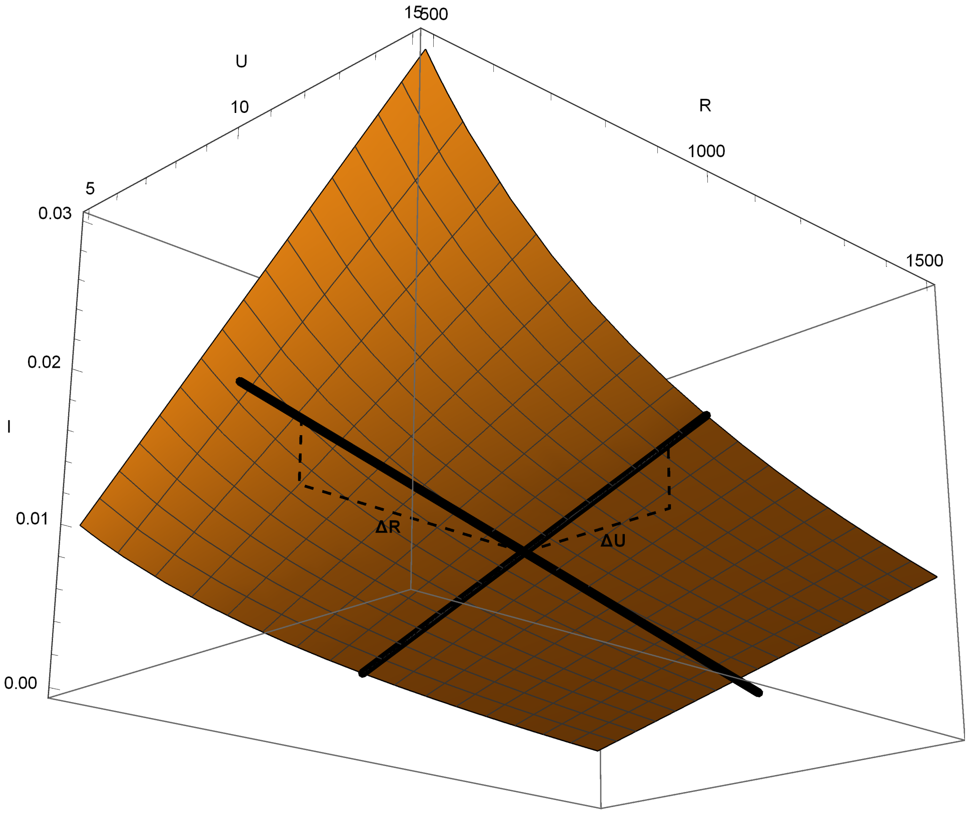
différentielle partielle de *I* par rapport à *R* en (10 V, 1000 Ω)

Interprétations géométriques (voir fig.)

* La différentielle partielle de *I* par rapport à *U* est la fonction linéaire représentée

par la droite située dans un plan vertical parallèle à l'axe *U* et tangente à la surface, de variable ΔU.

* La différentielle partielle de *I* par rapport à *R* est la fonction linéaire représentée par la droite située dans un plan vertical parallèle à l'axe *R* et tangente à la surface, de variable ΔR.



Corrigé de l'exercice 4-3

Dérivées partielles

$$\partial_x\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)$$

$$\frac{x}{t\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\partial_x\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right) \text{ /. } \{x\to 3\,m,\ y\to 2\,m,\ t\to 5\,s\}$$

$$\frac{3\,m}{5\sqrt{13}\ \sqrt{m^2}\ s}$$

$$\partial_t\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)$$

$$-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t^2}$$

$$\partial_t\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right) \text{ /. } \{x\to 3\,m,\ y\to 2\,m,\ t\to 5\,s\}$$

$$-\frac{\sqrt{13}\ \sqrt{m^2}}{25\,s^2}$$

Différentielles partielles dv

$$\partial_x\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta x$$

$$\frac{x\,\Delta x}{t\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\partial_x\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta x \text{ /. } \{x\to 3\,m,\ y\to 2\,m,\ t\to 5\,s\}$$

$$\frac{3\,m\,\Delta x}{5\sqrt{13}\ \sqrt{m^2}\ s}$$

$$\partial_t\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta t$$

$$-\frac{\sqrt{x^2+y^2}\ \Delta t}{t^2}$$

$$\partial_t\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta t\ /.\ \{x\to 3\,m,\ y\to 2\,m,\ t\to 5\,s\}$$

$$-\frac{\sqrt{13}\ \sqrt{m^2}\ \Delta t}{25\ s^2}$$

Accroissements partiels approximés par les différentielles partielles : Δv ≈ dv

$$\partial_x\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta x$$

$$\frac{x\ \Delta x}{t\ \sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\partial_x\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta x\ /.\ \{x\to 3\,m,\ y\to 2\,m,\ t\to 5\,s,\ \Delta x\to 0.1\,m\}$$

$$\frac{0.016641\ \sqrt{m^2}}{s}$$

$$\partial_t\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta t$$

$$-\frac{\sqrt{x^2+y^2}\ \Delta t}{t^2}$$

$$\partial_t\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta t\ /.\ \{x\to 3\,m,\ y\to 2\,m,\ t\to 5\,s,\ \Delta t\to 0.2\,s\}$$

$$-\frac{0.0288444\ \sqrt{m^2}}{s}$$

Erreurs d'approximation $e = \Delta v - dv$

$$\left(\frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2+y^2}}{t}-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)-\partial_x\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta x$$

$$-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}-\frac{x\ \Delta x}{t\ \sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\sqrt{y^2+(x+\Delta x)^2}}{t}$$

$$\left(\frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2+y^2}}{t}-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)-\partial_x\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta x\ /.\ \{x\to 3\,m,\ y\to 2\,m,\ t\to 5\,s,\ \Delta x\to 0.1\,m\}$$

$$\frac{0.0000834088\ \sqrt{m^2}}{s}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t+\Delta t}-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)-\partial_t\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta t$$

$$-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}\ \Delta t}{t^2}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t+\Delta t}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t+\Delta t}-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)-\partial_t\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta t\ /.\ \{x\to 3\,m,\ y\to 2\,m,\ t\to 5\,s,\ \Delta t\to 0.2\,s\}$$

$$\frac{0.0011094\sqrt{m^2}}{s}$$

Différentielles partielles relatives $\frac{dv}{v}$

$$\frac{\partial_x\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta x}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}}$$

$$\frac{x\,\Delta x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial_x\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta x}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}}\ /.\ \{x\to 3\,m,\ y\to 2\,m,\ t\to 5\,s\}$$

$$\frac{3\,\Delta x}{13\,m}$$

$$\frac{\partial_t\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta t}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}}$$

$$-\frac{\Delta t}{t}$$

$$\frac{\partial_t\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta t}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}}\ /.\ \{x\to 3\,m,\ y\to 2\,m,\ t\to 5\,s\}$$

$$-\frac{\Delta t}{5\,s}$$

Accroissements partiels relatifs approximés par les différentielles partielles relatives $\frac{\Delta v}{v}\approx\frac{dv}{v}$

$$\frac{\partial_x\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta x}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}}\ /.\ \{x\to 3\,m,\ y\to 2\,m,\ t\to 5\,s\}$$

$$\frac{3\,\Delta x}{13\,m}$$

$$\frac{\partial_x\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta x}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}} \text{ /. } \{x \to 3\,m,\ y \to 2\,m,\ t \to 5\,s,\ \Delta x \to 0.01 * 3\,m\}$$

0.00692308

$$\frac{\partial_t\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta t}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}} \text{ /. } \{x \to 3\,m,\ y \to 2\,m,\ t \to 5\,s\}$$

$$-\frac{\Delta t}{5\,s}$$

$$\frac{\partial_t\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right)\Delta t}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}} \text{ /. } \{x \to 3\,m,\ y \to 2\,m,\ t \to 5\,s,\ \Delta t \to 0.01 * 5\,s\}$$

-0.01

On remarquera que les résultats obtenus sont des nombres purs (sans unité).

Interprétation : au voisinage de $x = 3\,m$, $y = 2\,m$ et $t = 5\,s$, on a

lorsque x augmente de 1 %, v augmente de 0.7 %;

lorsque t augmente de 1 %, v diminue de 1 %.

Corrigé de l'exercice 4-4

Fonction

$$\boxed{v(g, h) = \sqrt{2 g h}}$$

Dérivées partielles

$$\frac{\partial v(g, h)}{\partial g} = \sqrt{2 h}\ \frac{\partial}{\partial g}\left(g^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{2 h}\ \frac{1}{2\sqrt{g}} = \sqrt{\frac{h}{2 g}}$$

$$\frac{\partial v\left(9.81\ \frac{m}{s^2}, 2\ m\right)}{\partial g} = \sqrt{\frac{2\ m}{2 * 9.81\ \frac{m}{s^2}}} = 0.319\ s$$

$$\frac{\partial v(g, h)}{\partial h} = \sqrt{2 g}\ \frac{\partial}{\partial h}\left(h^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{2 g}\ \frac{1}{2\sqrt{h}} = \sqrt{\frac{g}{2 h}}$$

$$\frac{\partial v\left(9.81\ \frac{m}{s^2}, 2\ m\right)}{\partial h} = \sqrt{\frac{9.81\ \frac{m}{s^2}}{2 * 2\ m}} = 1.566\ \frac{1}{s}$$

Différentielles partielles dv

$$\frac{\partial v(g, h)}{\partial g}\ \Delta g = \sqrt{\frac{h}{2 g}}\ \Delta g \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial v\left(9.81\ \frac{m}{s^2}, 2\ m\right)}{\partial g}\ \Delta g = 0.319\ s\ \Delta g$$

$$\frac{\partial v(g, h)}{\partial h}\ \Delta h = \sqrt{\frac{g}{2 h}}\ \Delta h \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial v\left(9.81\ \frac{m}{s^2}, 2\ m\right)}{\partial h}\ \Delta h = 1.566\ \frac{1}{s}\ \Delta h$$

Approximation des accroissements partiels par les différentielles partielles $\Delta v \approx dv$

$$\sqrt{2 (g + \Delta g) h} - \sqrt{2 g h} \approx \sqrt{\frac{h}{2 g}}\ \Delta g$$

$$\sqrt{2 g (h + \Delta h)} - \sqrt{2 g h} \approx \sqrt{\frac{g}{2 h}}\ \Delta h$$

Valeurs numériques des différentielles partielles

$$\sqrt{\frac{h}{2 g}}\ \Delta g = (0.319\ s)\left(-0.1\ \frac{m}{s^2}\right) \simeq -0.0319\ \frac{m}{s}$$

$$\sqrt{\frac{g}{2 h}}\ \Delta h = \left(1.566\ \frac{1}{s}\right)(-0.05\ m) \simeq -0.0783\ \frac{m}{s}$$

Différentielles partielles relatives $\frac{dv}{v}$

$$\frac{\frac{\partial v(g,h)}{\partial g}\ \Delta g}{v} = \frac{\sqrt{\frac{h}{2 g}}\ \Delta g}{\sqrt{2 g h}} = \frac{\Delta g}{2 g}$$

$$\frac{\frac{\partial v\,(g,h)}{\partial h}\,\Delta h}{v} = \frac{\sqrt{\frac{g}{2\,h}}\,\Delta h}{\sqrt{2\,g\,h}} = \frac{\Delta h}{2\,h}$$

Approximation des accroissements partiels relatifs par les différentielles partielles relatives $\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{dv}{v}$

$$\frac{\sqrt{2\,(g+\Delta g)\,h} - \sqrt{2\,g\,h}}{\sqrt{2\,g\,h}} \approx \frac{\frac{\partial v\,(g,h)}{\partial g}\,\Delta g}{v} = \frac{\Delta g}{2\,g} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta g}{g}\right) = \frac{1}{2}\,(-0.01) = -0.005$$

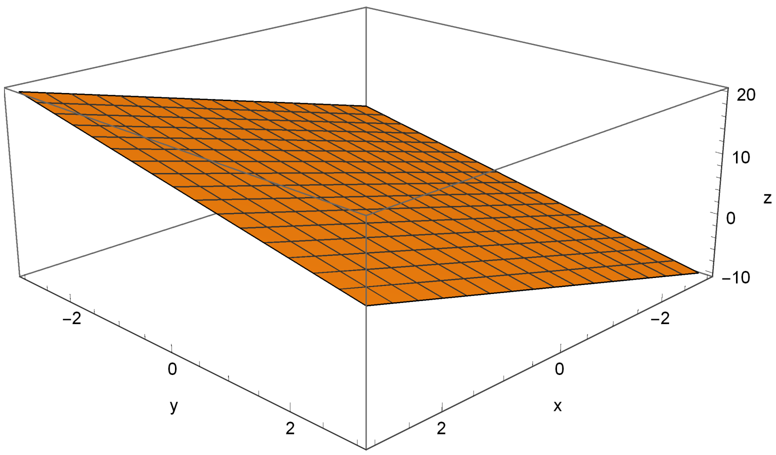
$$\frac{\sqrt{2\,g\,(h+\Delta h)} - \sqrt{2\,g\,h}}{\sqrt{2\,g\,h}} \approx \frac{\frac{\partial v\,(g,h)}{\partial h}\,\Delta h}{v} = \frac{\sqrt{\frac{g}{2\,h}}\,\Delta h}{\sqrt{2\,g\,h}} = \frac{\Delta h}{2\,h} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta h}{h}\right) = \frac{1}{2}\,(-0.01) = -0.005$$

Lorsque *g* diminue de 1 %, *v* diminue de 0.5 % (indépendamment de *h*) et
lorsque *h* diminue de 1 %, *v* diminue de 0.5 % (indépendamment de *g*).

Exercice 4-5

```
Plot3D[3 x - 2 y + 5, {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
 AxesLabel → {"x", "y", "z"}, ViewPoint → {2, 2, 1}, ImageSize → {400, 300}]
```

tracé de surfaces · titre d'axe · point de vue spatial · taille d'image

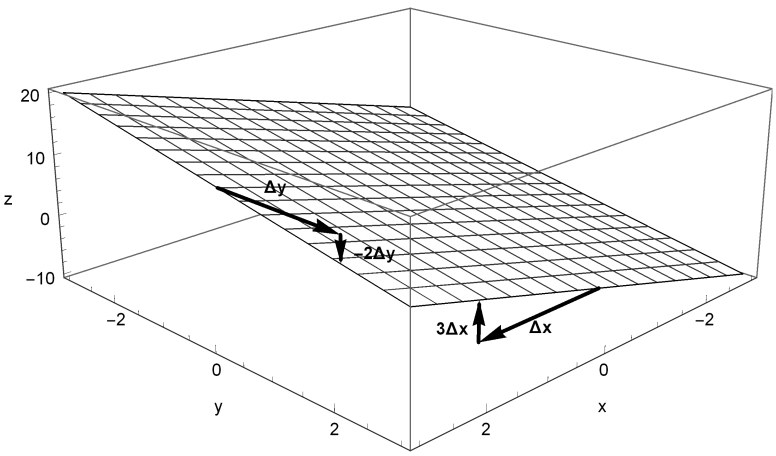


$$z = f(x, y) = 3x - 2y + 5$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x, y; \Delta x, 0)}{\Delta x} =$$

$$\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{(3(x + \Delta x) - 2y + 5) - (3x - 2y + 5)}{\Delta x} = \frac{3\,\Delta x}{\Delta x} = 3$$

$\frac{\Delta z}{\Delta x}$ représente la pente de la droite qui est située dans un plan vertical parallèle à l'axe des x.
Cette pente ne dépend pas du point (x, y). Elle est partout la même.
Cela signifie que les lignes de la surface avec $y =$ const sont des droites et que ces droites sont parallèles entre elles (voir figure ci-dessous).



$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{\Delta f\,(x,\,y;\,0,\,\Delta y)}{\Delta y} =$$

$$\frac{f\,(x,\,y+\Delta y) - f\,(x,\,y)}{\Delta y} = \frac{(3\,x-2\,(y+\Delta y)+5) - (3\,x-2\,y+5)}{\Delta y} = \frac{-2\,\Delta y}{\Delta y} = -2$$

$\frac{\Delta z}{\Delta y}$ représente la pente de la droite qui est située dans un plan vertical parallèle à l'axe des y.

Cette pente ne dépend pas du point (x, y). Elle est partout la même.

Cela signifie que les lignes de la surface avec $x = \text{const}$ sont des droites et que ces droites sont parallèles entre elles

(voir figure).

L'équation donnée représente un plan.

Exercice 4-6

$$z = f(x, y) = 2x^2 - 5y^2$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 4x$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -10y$$

La droite qui est tangente à la surface au point (x_0, y_0) et qui est située dans un plan vertical parallèle à l'axe des x est décrite par le système cartésien

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) \end{cases}$$

Ici $(x_0, y_0) = (3; -1)$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 4 * 3 = 12$, $z_0 = f(x_0, y_0) = 13$

$$\begin{cases} y = -1 \\ z - 13 = 12 (x - 3) \end{cases}$$

La droite qui est tangente à la surface au point (x_0, y_0) et qui est située dans un plan vertical parallèle à l'axe des y est décrite par le système cartésien

$$\begin{cases} x = x_0 \\ z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) \end{cases}$$

Ici $(x_0, y_0) = (3; -1)$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = -10 * (-1) = 10$, $z_0 = f(x_0, y_0) = 13$

$$\begin{cases} x = 3 \\ z - 13 = 10 (y + 1) \end{cases}$$

Exercice 4-7

$$H(\theta) = \frac{k\,24\,h}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L\,(1+\alpha\,(\theta-\theta_0))}}$$

Pour calculer la dérivée partielle de *H* par rapport à *θ*, on commence par sortir les constantes

$$\frac{\partial H(\theta)}{\partial\theta} = \frac{k\,24\,h}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sqrt{\frac{1}{1+\alpha\,(\theta-\theta_0)}}\right) = \frac{k\,24\,h}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left((1+\alpha\,(\theta-\theta_0))^{-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$\frac{k\,24\,h}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+\alpha\,(\theta-\theta_0))^{-\frac{3}{2}}\,\alpha = -\frac{k\,(24\,h)\,\alpha}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{L\,(1+\alpha\,(\theta-\theta_0))^3}}$$

La différentielle partielle de *H* par rapport à *θ* en θ_0 est

$$dH(\theta_0;\ \Delta\theta) = \frac{\partial H(\theta_0)}{\partial\theta}\,\Delta\theta = -\frac{k\,(24\,h)\,\alpha}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{L\,(1+\alpha\,(\theta_0-\theta_0))^3}}\,\Delta\theta = -\frac{k\,(24\,h)\,\alpha}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}\,\Delta\theta$$

L'accroissement relatif $\frac{\Delta H}{H}$ est approximé par la différentielle relative

$$\frac{dH(\theta_0;\ \Delta\theta)}{H(\theta_0)} = \frac{-\frac{k\,(24\,h)\,\alpha}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}\,\Delta\theta}{\frac{k\,24\,h}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}} = -\frac{\alpha\,\Delta\theta}{2}$$

La dérive journalière vaut donc approximativement

$$\Delta H = \frac{dH}{H}\,(24\,h) = \boxed{-\frac{\alpha\,\Delta\theta\,(24\,h)}{2}}$$

La dérive journalière est indépendante de la longueur du balancier. Il est donc indifférent que le balancier soit long ou court.

Corrigé de l'exercice 5-1

Fonction E

$$\boxed{E(m,\ v) = \frac{1}{2}\,m\,v^2}$$

Accroissement total ΔE

$$\Delta E(m,\ v;\ \Delta m,\ \Delta v) = \frac{1}{2}\,(m+\Delta m)\,(v+\Delta v)^2 - \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

$$\Delta E\left(2\,kg,\ 5\,\frac{m}{s};\ \Delta m,\ \Delta v\right) = \frac{1}{2}\,(2\,kg+\Delta m)\left(5\,\frac{m}{s}+\Delta v\right)^2 - \frac{1}{2}\,(2\,kg)\left(5\,\frac{m}{s}\right)^2$$

$$= \frac{25\,m^2\,\Delta m}{2\,s^2} + \frac{10\,kg\,m\,\Delta v}{s} + \frac{5\,m\,\Delta m\,\Delta v}{s} + kg\,\Delta v^2 + \frac{\Delta m\,\Delta v^2}{2}$$

Dérivées partielles

$$\frac{\partial E(m,\ v)}{\partial m} = \frac{1}{2}\,v^2 \implies \frac{\partial E\left(2\,kg,\ 5\,\frac{m}{s}\right)}{\partial m} = \frac{1}{2}\left(5\,\frac{m}{s}\right)^2 = \frac{25}{2}\,\frac{m^2}{s^2}$$

$$\frac{\partial E\,(m,\,v)}{\partial v} = m\,v \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial E\left(2\,\mathrm{kg},\ 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{\partial v} = 2\,\mathrm{kg}\left(5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 10\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$$

Différentielle totale dE

$$dE\,(m,\,v;\,\triangle m,\,\triangle v) = \frac{\partial E\,(m,\,v)}{\partial m}\,\triangle m + \frac{\partial E\,(m,\,v)}{\partial v}\,\triangle v = \frac{1}{2}\,v^2\,\triangle m + m\,v\,\triangle v$$

$$dE\left(2\,\mathrm{kg},\,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};\,\triangle m,\,\triangle v\right) = \frac{\partial E\left(2\,\mathrm{kg},\ 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{\partial m}\,\triangle m + \frac{\partial E\left(2\,\mathrm{kg},\ 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{\partial v}\,\triangle v$$

$$= \frac{1}{2}\left(5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\triangle m + 2\,\mathrm{kg}\left(5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\triangle v$$

$$= \frac{25}{2}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\,\triangle m + 10\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}\,\triangle v$$

Comparaison:

dans ΔE, les termes linéaires représentent dE tandis que
les termes non linéaires représentent l'écart $e = \Delta E - dE$ (erreur d'approximation).

Accroissement total approximé par la différentielle totale $\Delta E \approx dE$

(le résultat est exprimé en joules)

$$\frac{1}{2}\,(m+\triangle m)\,(v+\triangle v)^2 - \frac{1}{2}\,m\,v^2 \approx \frac{\partial E\,(m,\,v)}{\partial m}\,\triangle m + \frac{\partial E\,(m,\,v)}{\partial v}\,\triangle v$$

$$=$$

$$\frac{1}{2}\,v^2\,\triangle m + m\,v\,\triangle v = \frac{1}{2}\left(5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2(0.1\,\mathrm{kg}) + (2\,\mathrm{kg})\left(5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\left(0.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 3.25\,\frac{\mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2} = 3.25\,\mathrm{J}$$

Corrigé de l'exercice 5-2

Fonction I

$$\boxed{I(U, R) = \frac{U}{R}}$$

Accroissement total ΔI

$$\Delta I(U, R;\ \Delta U, \Delta R) = \frac{U + \Delta U}{R + \Delta R} - \frac{U}{R}$$

$$\Delta I(10\,V,\ 1000\,\Omega;\ \Delta U, \Delta R) = \frac{10\,V + \Delta U}{1000\,\Omega + \Delta R} - \frac{10\,V}{1000\,\Omega}$$

Dérivées partielles

$$\frac{\partial I(U, R)}{\partial U} = \frac{1}{R} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial I(10\,V,\ 1000\,\Omega)}{\partial U} = \frac{1}{1000\,\Omega}$$

$$\frac{\partial I(U, R)}{\partial R} = \frac{-U}{R^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial I(10\,V,\ 1000\,\Omega)}{\partial R} = \frac{-10\,V}{(1000\,\Omega)^2} = -10^{-5}\,\frac{V}{\Omega^2}$$

Différentielle totale dI

$$dI(U, R;\ \Delta U, \Delta R) = \frac{\partial I(U, R)}{\partial U}\Delta U + \frac{\partial I(U, R)}{\partial R}\Delta R = \frac{\Delta U}{R} - \frac{U\,\Delta R}{R^2}$$

$$dI(10\,V, 1000\,\Omega;\ \Delta U, \Delta R) = \frac{\partial I(10\,V,\ 1000\,\Omega)}{\partial U}\Delta U + \frac{\partial I(10\,V,\ 1000\,\Omega)}{\partial R}\Delta R$$

$$= \frac{\Delta U}{1000\,\Omega} - 10^{-5}\,\frac{V}{\Omega^2}\,\Delta R$$

Valeur approchée de $I = \frac{U+\Delta U}{R+\Delta R}$ calculée au moyen de dI

$$\frac{U + \Delta U}{R + \Delta R} - \frac{U}{R} \approx \frac{\Delta U}{R} - \frac{U\,\Delta R}{R^2}$$

$$I = \frac{U + \Delta U}{R + \Delta R} \approx \frac{U}{R} + \frac{\Delta U}{R} - \frac{U\,\Delta R}{R^2}$$

$$I = \frac{10\,V - 0.5\,V}{1000\,\Omega + 10\,\Omega} \approx \frac{10\,V}{1000\,\Omega} + \frac{-0.5\,V}{1000\,\Omega} - \frac{10\,V\,10\,\Omega}{(1000\,\Omega)^2} = 0.0094\,\frac{V}{\Omega} = 0.0094\,A$$

Interprétation géométrique (voir figure, vue depuis dessous):

l'accroissement total ΔI est représenté par la surface

$$(\Delta U,\ \Delta R) \mapsto \frac{U + \Delta U}{R + \Delta R} - \frac{U}{R}$$

la différentielle totale de I est représentée par le plan tangent à la surface au point $(U,\ R)$

$$(\Delta U,\ \Delta R) \mapsto \frac{\Delta U}{R} - \frac{U\,\Delta R}{R^2}$$

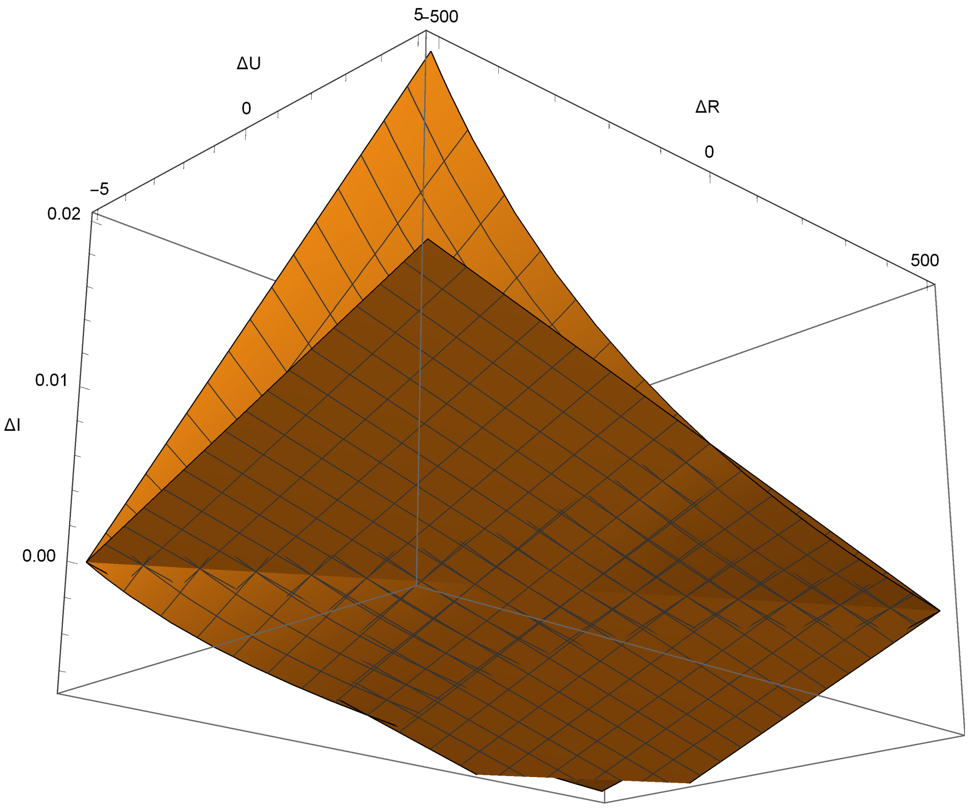
```
u = 10; r = 1000;
Show[Plot3D[(u + Δu)/(r + Δr) - u/r, {Δu, -5, 5}, {Δr, -500, 500}, DisplayFunction → Identity],
 Plot3D[Δu/r - (u Δr)/r^2, {Δu, -5, 5}, {Δr, -500, 500}, DisplayFunction → Identity],
 ImageSize → {500, 500}, DisplayFunction → $DisplayFunction,
 BoxRatios → {2, 3, 2}, ViewPoint → {2, -2, -1}, AxesLabel → {"ΔU", "ΔR", "ΔI"}]
```

mon·· | tracé de surfaces | fonction d'affichage | identité

tracé de surfaces | fonction d'affichage | identité

taille d'image | fonction d'affichage | fonction d'affichage par défaut

rapports de boîte | point de vue spatial | titre d'axe



Corrigé de l'exercice 5-3

Accroissement total Δv

$$\frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2}}{t+\Delta t} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}$$

$$-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t} + \frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2}}{t+\Delta t}$$

$$\Delta v = \left(\frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2}}{t+\Delta t} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right) /. \{x \to 3\,m,\ y \to 2\,m,\ t \to 5\,s\}$$

$$-\frac{\sqrt{13}\ \sqrt{m^2}}{5\ s} + \frac{\sqrt{(3\ m+\Delta x)^2 + (2\ m+\Delta y)^2}}{5\ s+\Delta t}$$

Accroissement total relatif $\frac{\Delta v}{v}$

$$\frac{\frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2}}{t+\Delta t} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}}$$

$$\frac{t\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t} + \frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2}}{t+\Delta t}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{t\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t} + \frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2}}{t+\Delta t}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} /. \{x \to 3\,m,\ y \to 2\,m,\ t \to 5\,s\}$$

$$\frac{5\ s\left(-\frac{\sqrt{13}\ \sqrt{m^2}}{5\ s} + \frac{\sqrt{(3\ m+\Delta x)^2+(2\ m+\Delta y)^2}}{5\ s+\Delta t}\right)}{\sqrt{13}\ \sqrt{m^2}}$$

Différentielle totale dv

$$\mathrm{Dt}\left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right]$$

dérivée totale

$$-\frac{\sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{Dt}[t]}{t^2} + \frac{2\,x\,\mathrm{Dt}[x] + 2\,y\,\mathrm{Dt}[y]}{2\,t\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\mathrm{Dt}\left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right] /. \{\mathrm{Dt}[x] \to \Delta x,\ \mathrm{Dt}[y] \to \Delta y,\ \mathrm{Dt}[t] \to \Delta t\}$$

dérivée totale dérivée totale dérivée totale dérivée totale

$$-\frac{\sqrt{x^2+y^2}\ \Delta t}{t^2} + \frac{2\,x\,\Delta x + 2\,y\,\Delta y}{2\,t\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dv = \mathrm{Dt}\left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\right] /. \{\mathrm{Dt}[x] \to \Delta x,\ \mathrm{Dt}[y] \to \Delta y,\ \mathrm{Dt}[t] \to \Delta t\} /. \{x \to 3\,m,\ y \to 2\,m,\ t \to 5\,s\}$$

dérivée totale dérivée totale dérivée totale dérivée totale

$$-\frac{\sqrt{13}\ \sqrt{m^2}\ \Delta t}{25\ s^2} + \frac{6\ m\ \Delta x + 4\ m\ \Delta y}{10\sqrt{13}\ \sqrt{m^2}\ s}$$

Erreurs d'approximation $e = \Delta v - dv$

Δv − dv

$$-\frac{\sqrt{13}\ \sqrt{m^2}}{5\ s}+\frac{\sqrt{13}\ \sqrt{m^2}\ \Delta t}{25\ s^2}-\frac{6\ m\ \Delta x+4\ m\ \Delta y}{10\ \sqrt{13}\ \sqrt{m^2}\ s}+\frac{\sqrt{(3\ m+\Delta x)^2+(2\ m+\Delta y)^2}}{5\ s+\Delta t}$$

Différentielle totale relative $\frac{dv}{v}$

$$\frac{dv}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}}\ \text{/. } \{x\to 3\ m,\ y\to 2\ m,\ t\to 5\ s\}$$

$$\frac{5\ s\left(-\frac{\sqrt{13}\ \sqrt{m^2}\ \Delta t}{25\ s^2}+\frac{6\ m\ \Delta x+4\ m\ \Delta y}{10\ \sqrt{13}\ \sqrt{m^2}\ s}\right)}{\sqrt{13}\ \sqrt{m^2}}$$

$$\frac{dv}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}}\ \text{/. } \{x\to 3\ m,\ y\to 2\ m,\ t\to 5\ s\}\ \text{/. } \{\Delta x\to 0.01*3\ m,\ \Delta y\to 0.01*2\ m,\ \Delta t\to -0.01*5\ s\}$$

0.02

La vitesse augmente de 2 %.

Corrigé de l'exercice 5-4

Dérivées partielles

$\partial_F (F \operatorname{Cos}[\alpha])$
cosinus

$\operatorname{Cos}[\alpha]$

$\partial_\alpha (F \operatorname{Cos}[\alpha])$
cosinus

$-F \operatorname{Sin}[\alpha]$

Dérivée totale dT

$$dT = \cos(\alpha)\,\Delta F - F\sin(\alpha)\,\Delta\alpha$$
$$= \cos(0.85)\,\Delta F - 36\,N \sin(0.85)\,\Delta\alpha \simeq 0.659983\,\Delta F - 27.0461\,N\,\Delta\alpha$$

Variation totale approximée par la différentielle ΔT≈dT

$$\Delta T \approx dT = 0.659983\,\Delta F - 27.0461\,N\,\Delta\alpha = 0.659983\,(-0.3\,N) - 27.0461\,N\,0.02$$
$$= -0.738917\,N$$

Corrigé de l'exercice 5-5

$$z = 1 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}y^2 \qquad \text{au point} \qquad (x_0, y_0) = (-2, 3)$$

Dérivées partielles

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-1}{12}2x = -\frac{1}{6}x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-1}{3}2y = -\frac{2}{3}y$$
$$z_0 = f(x_0, y_0) = 1 - \frac{1}{12}4 - \frac{1}{3}9 = 1 - \frac{1}{3} - 3 = -\frac{7}{3}$$

La différentielle totale df est la fonction qui correspond au plan

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$
$$z - z_0 = -\frac{1}{6}x_0(x - x_0) - \frac{2}{3}y_0(y - y_0)$$
$$z + \frac{7}{3} = -\frac{1}{6}(-2)(x + 2) - \frac{2}{3}3(y - 3)$$
$$\boxed{z + \frac{7}{3} = \frac{1}{3}(x + 2) - 2(y - 3)}$$

$$z = 15 + x^2 - \frac{1}{2}y^2 \qquad \text{au point} \qquad (x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$$

Dérivées partielles

$$f(x, y) = 15 + x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-1}{2} 2y = -y$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 15 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{547}{36}$$

La différentielle totale df est la fonction qui correspond au plan

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

$$z - z_0 = 2x_0 (x - x_0) - y_0 (y - y_0)$$

$$z - \frac{547}{36} = 2\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{z - \frac{547}{36} = \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(y + \frac{1}{3}\right)}$$

Exercice 5-6

$$z^2 = r^2 - x^2 - y^2$$

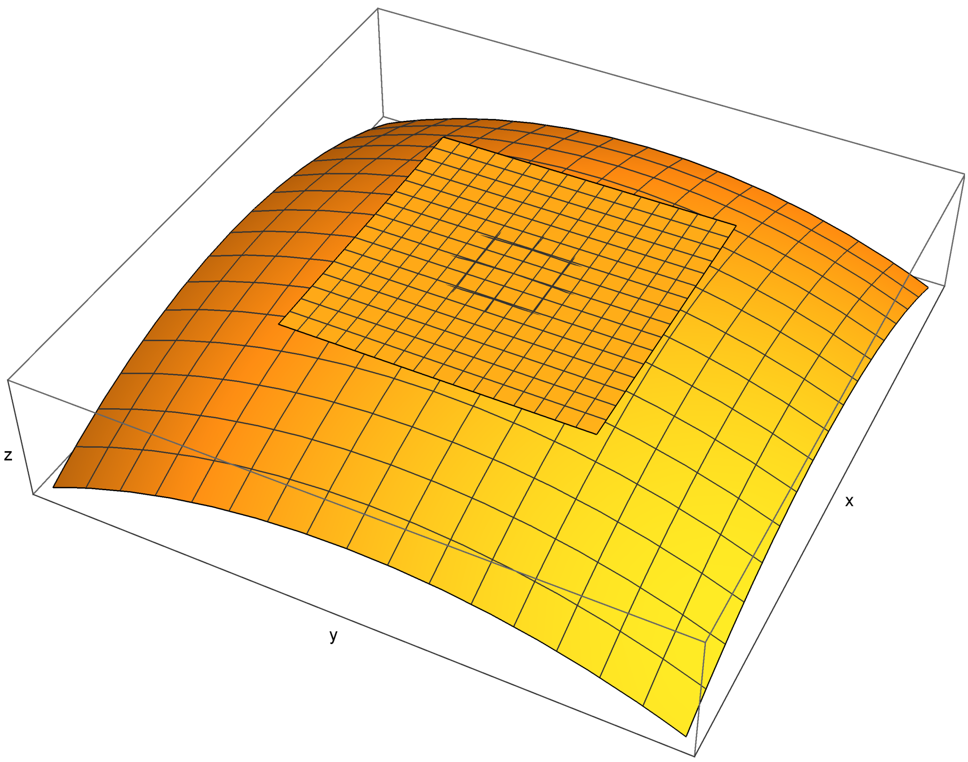
$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \qquad \text{ou} \qquad z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

La première fonction décrit l'hémisphère $z \geq 0$ (disons l'hémisphère nord), la deuxième l'hémisphère $z \leq 0$ (disons l'hémisphère sud). L'ensemble de définition de chaque fonction est

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\} = \text{cercle de centre } (0, 0) \text{ et de rayon } r$$

En ce qui concerne la question posée, la situation est la même en tout point de la terre. Choissisons le point (0, 0, *r*) (pôle nord) comme étant le centre du terrain carré. La surface terrestre est alors décrite par la fonction

$$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \qquad \text{au voisinage de } (0, 0)$$



La différentielle de *f* en (0, 0) représente le plan tangent à la surface; ici, le plan est horizontal et la fonction linéaire est constante

$$\begin{aligned} df(x, y; \Delta x, \Delta y) &= \partial_x f(x, y)\, \Delta x + \partial_y f(x, y)\, \Delta y \\ &= \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \Delta x + \frac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \Delta y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df(0, 0; \Delta x, \Delta y) &= \partial_x f(0, 0)\, \Delta x + \partial_y f(0, 0)\, \Delta y \\ &= 0\, \Delta x + 0\, \Delta y = 0 \end{aligned}$$

L'écart entre le plan et la surface, mesuré parallèlement à l'axe des *z*, est $e = \Delta f - df = \Delta f - 0 = \Delta f$ = accroissement total de f

$$\Delta f(x, y;\ \Delta x, \Delta y) =$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \sqrt{r^2 - (x + \Delta x)^2 - (y + \Delta y)^2} - \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$\Delta f(0, 0;\ \Delta x, \Delta y) = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = \sqrt{r^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2} - r$$

Numériquement, en mètres,

```
Clear[r, Δx, Δy];
```

efface

```
√(r² - Δx² - Δy²) - r /. {r → 6.371 × 10⁶ , Δx → 80 , Δy → 80 }
```

```
-0.00100455
```

Dans l'interprétation a), dans les coins, le terrain est 1 mm plus bas que dans l'interprétation b).

Exercice 5-7

En utilisant une méthode élémentaire, on résout l'équation $\Delta m = 0$, c'est-à-dire

$$\pi\ (r + \Delta r)^2\ (h + \Delta h)\ (\rho + \Delta\rho) - \pi\, r^2\, h\, \rho = 0 \qquad \text{d' inconnue} \qquad \Delta r$$

qui est du deuxième degré en Δr. Par contre, en partant de l'équation $dm = 0$, on obtient une équation du premier degré en Δr car la différentielle est linéaire en Δr.

Dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\pi\, r^2\, h\, \rho\right) = 2\,\pi\, r\, h\, \rho$$
$$\frac{\partial}{\partial h}\left(\pi\, r^2\, h\, \rho\right) = \pi\, r^2\, \rho$$
$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\pi\, r^2\, h\, \rho\right) = \pi\, r^2\, h$$

La différentielle totale est nulle

$$dm = 2\,\pi\, r\, h\, \rho\, \Delta r + \pi\, r^2\, \rho\, \Delta h + \pi\, r^2\, h\, \Delta\rho = 0$$
$$\Delta r = \frac{-\pi\, r^2\, \rho\, \Delta h - \pi\, r^2\, h\, \Delta\rho}{2\,\pi\, r\, h\, \rho} = \frac{-r\, \rho\, \Delta h - r\, h\, \Delta\rho}{2\ h\, \rho}$$
$$\boxed{\frac{\Delta r}{r} = \frac{-\ \rho\, \Delta h -\ h\, \Delta\rho}{2\ h\, \rho}}$$

Calcul numérique

```
Simplify[(- ρ Δh - h Δρ)/(2 h ρ) /. {Δρ → -0.007 ρ, Δh → 0.003 h}]
```
simplifie

0.002

Réponse : le rayon doit augmenter de 0.2 %.

A titre de comparaison, résolvons le problème directement

```
Clear[Δr];
```
efface

```
Solve[π (r + Δr)^2 (h + Δh) (ρ + Δρ) - π r^2 h ρ == 0 , Δr]
```
résous

$$\left\{\left\{\Delta r \to \left(-h\, r\, \Delta\rho - r\, \Delta h\, \Delta\rho - h\, r\, \rho - r\, \Delta h\, \rho - \sqrt{h^2\, r^2\, \Delta\rho\, \rho + h\, r^2\, \Delta h\, \Delta\rho\, \rho + h^2\, r^2\, \rho^2 + h\, r^2\, \Delta h\, \rho^2}\right) \Big/ \left(h\, \Delta\rho + \Delta h\, \Delta\rho + h\, \rho + \Delta h\, \rho\right)\right\},\right.$$
$$\left.\left\{\Delta r \to \left(-h\, r\, \Delta\rho - r\, \Delta h\, \Delta\rho - h\, r\, \rho - r\, \Delta h\, \rho + \sqrt{h^2\, r^2\, \Delta\rho\, \rho + h\, r^2\, \Delta h\, \Delta\rho\, \rho + h^2\, r^2\, \rho^2 + h\, r^2\, \Delta h\, \rho^2}\right) \Big/ \left(h\, \Delta\rho + \Delta h\, \Delta\rho + h\, \rho + \Delta h\, \rho\right)\right\}\right\}$$

```
Solve[π (r + Δr)^2 (h + Δh) (ρ + Δρ) - π r^2 h ρ == 0 , Δr] /. {Δρ → -0.007 ρ, Δh → 0.003 h}
```
résous

$$\left\{\left\{\Delta r \to \frac{1.00404\left(-0.995979\, h\, r\, \rho - 0.997987\sqrt{h^2 r^2 \rho^2}\right)}{h\, \rho}\right\}, \left\{\Delta r \to \frac{1.00404\left(-0.995979\, h\, r\, \rho + 0.997987\sqrt{h^2 r^2 \rho^2}\right)}{h\, \rho}\right\}\right\}$$

Les conditions $r > 0$ et $(r + \Delta r) > 0$ nous imposent d'éliminer la première solution.

```
Solve[π (r + Δr)^2 (h + Δh) (ρ + Δρ) - π r^2 h ρ == 0 , Δr][[2]] /. {Δρ → -0.007 ρ, Δh → 0.003 h}
```
résous

$$\left\{\Delta r \to \frac{1.00404\left(-0.995979\, h\, r\, \rho + 0.997987\sqrt{h^2 r^2 \rho^2}\right)}{h\, \rho}\right\}$$

```
Δr = 1/(h ρ) 1.0040372337167751` (-0.9959789999999998` h r ρ + 0.9979874748713031` Sqrt[h^2 r^2 ρ^2]);
Simplify[Δr / r, {h > 0, ρ > 0, r > 0}]
```
simplifie

```
0.00201658
```

Les calculs à faire sont nettement plus lourds et les formules sont beaucoup plus compliquées.