Marcel Délèze
Edition 2017

Thème: § 3 Différentielle d'une fonction d'une seule variable
Lien vers les énoncés des exercices :
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/plusieurs-variables/3_DIFFERENTIELLES.pdf

Corrigé de l'exercice 3-1

Approximation de $(10 + 0.03)^5$

$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = 5\,x^4$$
$$df(x;\ \Delta x) = f'(x)\,\Delta x = 5\,x^4\,\Delta x$$
$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + df(x;\ \Delta x) = x^5 + 5\,x^4\,\Delta x$$
$$f(10 + 0.03) \approx f(10) + df(10;\ 0.03) = 10^5 + 5 \cdot 10^4 \cdot 0.03$$
$$= 100\,000 + 50\,000 \cdot 0.03 = 100\,000 + 1500 = 101\,500$$

Erreur d'approximation de $(10 + 0.03)^5$

$$e(x;\ \Delta x) = (f(x + \Delta x) - f(x)) - df(x;$$
$$\Delta x) = f(x + \Delta x) - (f(x) + df(x;\ \Delta x))$$
$$e(10;\ 0.03) = 10.03^5 - 101 \times 500 \simeq 9.027$$
$$\left| \frac{e(10;\ 0.03)}{f(10)} \right| \approx \frac{9.027}{100 \times 000} \simeq 9 \cdot 10^{-5}$$

Approximation de $\sqrt[3]{1000 + 2}$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\,\sqrt[3]{x^2}}$$
$$df(x;\ \Delta x) = f'(x)\,\Delta x = \frac{\Delta x}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$
$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + df(x;\ \Delta x) = \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$
$$f(1000 + 2) \approx f(1000) + df(1000;\ 2) = \sqrt[3]{1000} + \frac{2}{3\left(\sqrt[3]{1000}\right)^2}$$
$$= 10 + \frac{2}{3 \cdot 100} \simeq 10 + 0.006667 = 10.006667$$

Erreur d'approximation de $\sqrt[3]{1000 + 2}$

$$e(x;\ \Delta x) = (f(x + \Delta x) - f(x)) - df(x;$$
$$\Delta x) = f(x + \Delta x) - (f(x) + df(x;\ \Delta x))$$
$$e(1000;\ 2) = \sqrt[3]{1002} - 10.006667 \simeq -0.0000044$$
$$\left| \frac{e(1000;\ 2)}{f(1000)} \right| \approx \frac{0.0000044}{10} \simeq 4.4 \cdot 10^{-7}$$

Approximation de $\pi\,(r + \Delta r)^2$

$$A(r) = \pi\,r^2$$
$$A'(r) = 2\,\pi\,r$$

$$dA\,(r;\ \Delta r) = A'\,(r)\,\Delta r = 2\,\pi\,r\,\Delta r$$
$$A\,(r+\Delta r) \approx A\,(r) + dA\,(r;\ \Delta r) = \pi\,r^2 + 2\,\pi\,r\,\Delta r$$
$$A\,(3+0.04) \approx A\,(3) + dA\,(3;\ 0.04) = \pi\,3^2 + 2\,\pi\,3\cdot 0.04$$
$$= \pi\,(9+0.24) = 9.24\,\pi \simeq 29.0283$$

Erreur d'approximation de $\pi(r+\Delta\mathrm{r})^2$

$$e\,(r;\ \Delta r) = (A\,(r+\Delta r) - A\,(r)) - dA\,(r;\ \Delta r) = A\,(r+\Delta r) - (A\,(r) + dA\,(r;\ \Delta r))$$
$$e\,(3;\ 0.04) = \pi\,3.04^2 - 9.24\,\pi = 0.0016\,\pi \approx 5\cdot 10^{-3}$$
$$\left|\frac{e\,(3;\ 0.04)}{A\,(3)}\right| \approx \frac{0.0016}{9} \simeq 1.8\cdot 10^{-4}$$

Facultatif: Estimation de l'erreur sur $\pi(r+\Delta\mathrm{r})^2$

$$A''\,(r) = 2\,\pi$$
$$e\,(3;\ 0.04) = \frac{0.04^2}{2}\ \sup\ \left|2\,\pi\right| = \frac{0.04^2}{2}\,2\,\pi \simeq 5\cdot 10^{-3}$$

Approximation de $\frac{d}{t+\Delta\mathrm{t}}$

$$v\,(t) = \frac{d}{t} = d\,t^{-1}$$
$$v'\,(t) = d\,(-1)\,t^{-2} = \frac{-d}{t^2}$$
$$dv\,(t;\ \Delta t) = v'\,(t)\,\Delta t = \frac{-d}{t^2}\cdot\Delta t$$
$$v\,(t+\Delta t) \approx v\,(t) + dv\,(t;\ \Delta t) = \frac{d}{t} - \frac{d\,\Delta t}{t^2}$$

Vitesse en kilomètres par minute

$$v\left(1+\frac{3}{60}\right) \approx v\,(1) + dv\,(1;\ 0.05) = \frac{1}{1} - \frac{1\cdot 0.05}{1^2} = 0.95 \qquad \left[\frac{km}{min}\right]$$

Erreur d'approximation de $\frac{d}{t+\Delta\mathrm{t}}$

$$e\,(t;\ \Delta t) = (v\,(t+\Delta t) - v\,(t)) - dv\,(t;\ \Delta t) = v\,(t+\Delta t) - (v\,(t) + dv\,(t;\ \Delta t))$$
$$e\left(1;\ \frac{3}{60}\right) = \frac{1}{1.05} - 0.95 = 0.002\times 38$$
$$\left|\frac{e\left(1;\ \frac{3}{60}\right)}{v\,(1)}\right| \approx \frac{0.002\times 38}{1} \simeq 2.4\cdot 10^{-3}$$

Facultatif: Estimation de l'erreur sur $\frac{d}{t+\Delta\mathrm{t}}$

$$v''\,(r) = \frac{2\,d}{t^3}$$
$$e\,(1;\ 0.05) = \frac{0.05^2}{2}\ \sup\ \left|\frac{2}{t^3}\right| = \frac{0.05^2}{2}\,\frac{2}{0.95^3} \simeq 0.0029$$

Calculs avec *Mathematica*, première méthode : la différentielle d’une fonction peut se calculer comme suit

```
Clear[f];
```
effaceI

$$f[x\_] := \frac{1}{\sqrt{x}}$$

```
f'[x] h
```

$$-\frac{h}{2\,x^{3/2}}$$

La valeur numérique de l'approximation linéaire est

```
f[100] + f'[100] (-0.06)
```

```
0.10003
```

L'erreur est

```
f[99.94] - (f[100] + f'[100] (-0.06))
```

1.35068×10^{-8}

$$\text{Abs}\left[\frac{f[99.94] - (f[100] + f'[100]\,(-0.06))}{f[100]}\right]$$

valeur absolue

1.35068×10^{-7}

<u>Calculs avec *Mathematica*, deuxième méthode</u> : la différentielle d'une fonction peut se calculer au moyen de la *différentielle totale* **Dt**

$$\text{Dt}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]$$

dérivée totale

$$-\frac{\text{Dt}[x]}{2\,x^{3/2}}$$

Dans l'expression précédente, Dt[*x*] représente Δx (appelé *différentielle totale de x* pour l'occasion). Passons à la valeur numérique de l'approximation linéaire

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \text{Dt}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]\right) \;/.\; \{x \to 100,\ \text{Dt}[x] \to -0.06\}$$

dérivée totale   dérivée totale

```
0.10003
```

L'erreur est

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x + \text{Dt}[x]}} - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \text{Dt}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]\right)\right) \;/.\; \{x \to 100,\ \text{Dt}[x] \to -0.06\}$$

dérivée totale   dérivée totale

1.35068×10^{-8}

$$\text{Abs}\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{x+\text{Dt}[x]}} - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \text{Dt}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \;/.\; \{x \to 100,\ \text{Dt}[x] \to -0.06\}\right]$$

valeur absolue   dérivée totale

1.35068×10^{-7}

Corrigé de l'exercice 3-2

$c(x+1) - c(x)$

$= (\text{coût de } x+1 \text{ pneus}) - (\text{coût de } x \text{ pneus})$

$= \text{coût de production du pneu numéro } (x+1)$

$c(101) - c(100)$

$= \text{coût de production du } 101-\text{ème pneu}$

$= 69.90 \quad [\text{Fr}]$

$c(x+1) - c(x)$

$= \Delta c(x;\ 1)$

$= \text{accroissement de la fonction } c \text{ en } x \text{ pour un accroissement } \Delta x = 1$

$c(101) - c(100)$

$= \Delta c(100;\ 1)$

$= \text{accroissement de la fonction } c \text{ en } x = 100 \text{ pour un accroissement } \Delta x = 1$

b) Approximation

$c(x+1) - c(x) = \Delta c(x;\ 1)$

$\approx dc(x;\ 1) = \text{différentielle de la fonction } c \text{ en } x \text{ pour } \Delta x = 1$

$= c'(x)\,1 = c'(x) = \text{dérivée de la fonction } c \text{ en } x$

$= 90 - 0.2\,x$

$dc(100;\ 1) = \text{différentielle de la fonction } c \text{ en } x \text{ pour } \Delta x = 1$

$= c'(100)\,1 = c'(100) = \text{dérivée de la fonction } c \text{ en } 100$

$= 70 \quad [\text{Fr}]$

La fonction coût marginal $c'(x)$ représente approximativement le coût de production de l'article numéro $(x+1)$.

Corrigé de l'exercice 3-3

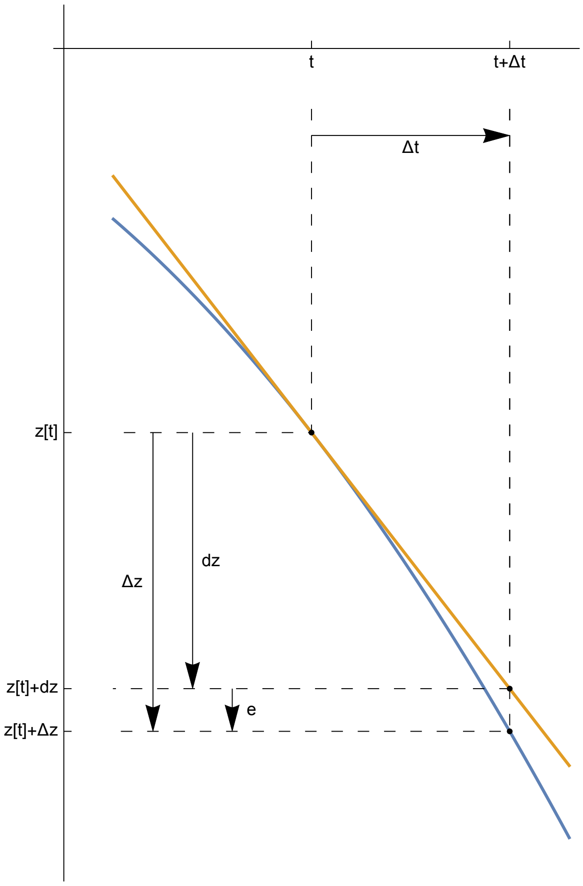
a) Variation de position Δz

$$z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2$$

$$\Delta z(t;\ \Delta t) = z(t+\Delta t) - z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,(t+\Delta t)^2 + \frac{1}{2}\,g\,t^2 = -\frac{1}{2}\,g\left((t+\Delta t)^2 - t^2\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\,g\left(t^2 + 2\,t\,\Delta t + \Delta t^2 - t^2\right) = -\frac{1}{2}\,g\left(2\,t\,\Delta t + \Delta t^2\right) = -g\,t\,\Delta t - \frac{1}{2}\,g\,\Delta t^2$$

$$\Delta z(3;\ \Delta t) = z(3+\Delta t) - z(3) = -3\,g\,\Delta t - \frac{1}{2}\,g\,\Delta t^2$$



b) Approximation linéaire dz

$$z'(t) = -\frac{1}{2} g\, 2\, t = -g\, t$$

$$dz(t;\ \Delta t) = -g\, t\, \Delta t$$

$$dz(3;\ \Delta t) = -g\, 3\, \Delta t = -3\, g\, \Delta t$$

c) Erreur d'approximation

$$e(t;\ \Delta t) = \Delta z(t;\ \Delta t) - dz(t,\ \Delta t) = -\frac{1}{2} g\, \Delta t^2 \qquad \text{indépendant de } t$$

$$e(3;\ \Delta t) = \Delta z(3;\ \Delta t) - dz(3;\ \Delta t) = -\frac{1}{2} g\, \Delta t^2$$

$$|e(3;\ \Delta t)| \leq 0.05\ \text{m} \iff \frac{1}{2} g\, \Delta t^2 \leq 0.05\ \text{m}$$

$$\iff \Delta t^2 \leq \frac{0.1\ \text{m}}{g} \approx 0.0102\ \text{s}^2 \iff |\Delta t| \leq 0.1\ \text{s}$$

Corrigé de l'exercice 3-4

D'une part,

$$p(x+1) - p(x)$$

$$= (\text{profit pour } x+1 \text{ congélateurs}) - (\text{profit pour } x \text{ congélateurs})$$

$= \text{profit pour le congélateur numéro } (x+1)$

D'autre part,

$p(x+1) - p(x)$

$= \Delta p(x;\ 1) = \text{accroissement de la fonction } p \text{ en } x \text{ pour l'accroissement } \Delta x = 1$

Approximation linéaire de Δp

$\Delta p(x;\ 1)$

$\approx dp(x;\ 1) = \text{différentielle de la fonction } p \text{ en } x \text{ pour } \Delta x = 1$

$= p'(x)\,1 = p'(x) = \text{dérivée de la fonction } p \text{ en } x \text{ appelée } \textbf{fonction profit marginal}$

$= 3x - 7000$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction profit marginal } p'(x) \text{ représente approximativement} \\ \text{le profit lié à la vente de l'article numéro } (x+1).\end{array}}$$

Application numérique

$\Delta p(6000;\ 1)$

$\approx dp(6000;\ 1) = p'(6000) = 3 \cdot 6000 - 7000 = 11\,000 \qquad [\text{Fr}]$

Corrigé de l'exercice 3-5

Fonction

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V'(r) = \frac{4}{3}\pi\, 3 r^2 = 4\pi r^2$$

$$dV(r;\ \Delta r) = 4\pi r^2 \Delta r$$

Accroissement relatif

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 \Delta r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3\ \Delta r}{r} = 3\ \frac{\Delta r}{r} = 3 \cdot 0.01 = 0.03 = 3 \times \%$$

En première approximation, lorsque le rayon augmente de 1 %, le volume augmente de 3 %.
Ce résultat est indépendant du rayon.

Corrigé de l'exercice 3-6

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Equation pour trouver la valeur exacte de Δr

$$\frac{\Delta V}{V} = 0.06$$

$$\frac{\frac{4}{3}\pi (r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 0.06$$

$$\frac{(r+\Delta r)^3 - r^3}{r^3} = 0.06$$

$$\frac{(0.5+\Delta r)^3}{0.5^3} - 1 = 0.06$$

Ici, on peut facilement résoudre cette équation du troisième degré en Δr à la main.

$$(0.5+\Delta r)^3 = (1+0.06)\cdot 0.5^3 \simeq 0.1325$$
$$0.5+\Delta r = \sqrt[3]{0.1325}$$
$$\Delta r = \sqrt[3]{0.1325} - 0.5 \simeq 0.0098$$

Dans d'autres situations, il faut savoir résoudre l'équation avec *Mathematica*

```
Clear[sol, Δr];
```
efface

$$\text{sol} = \text{NSolve}\left[\frac{(0.5+\Delta r)^3}{0.5^3} - 1 == 0.06, \Delta r\right]$$
résolveur numérique d'équations

{{Δr → -0.754903 - 0.441505 ⅈ}, {Δr → -0.754903 + 0.441505 ⅈ}, {Δr → 0.00980641}}

Accroissement du rayon Δr

```
Δr /. sol[[3]]
```
0.00980641

Accroissement relatif du rayon $\frac{\Delta r}{r}$

$$\frac{\Delta r \,/.\, \text{sol}[[3]]}{0.5}$$
0.0196128

Le rayon doit être augmenté de 1.96 %, c'est-à-dire le rayon doit être augmenté de 0.0098 *m*.

Différentielle dV

$$V'(r) = 4\pi r^2$$
$$dV(r;\ \Delta r) = V'(r)\,\Delta r = 4\pi r^2\,\Delta r$$
$$dV(0.5\,m;\ \Delta r) = V'(r)\,\Delta r = 4\pi\,(0.5\,m)^2\,\Delta r$$

Equation pour trouver une valeur approchée

$$\frac{dV}{V} = 0.06 \qquad (\text{ car } \quad \Delta V \approx dV)$$
$$\frac{4\pi r^2\,\Delta r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 0.06$$

Comme la différentielle est une fonction linéaire de Δr, l'équation est du premier degré en Δr. Il est très facile de résoudre cette équation, même à la main.

$$\frac{3\,\Delta r}{r} = 0.06$$
$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{0.06}{3}$$
$$\frac{\Delta r}{r} = 0.02$$
$$\Delta r = 0.02\,r = 0.02 * 0.5\,m = 0.01\,m$$