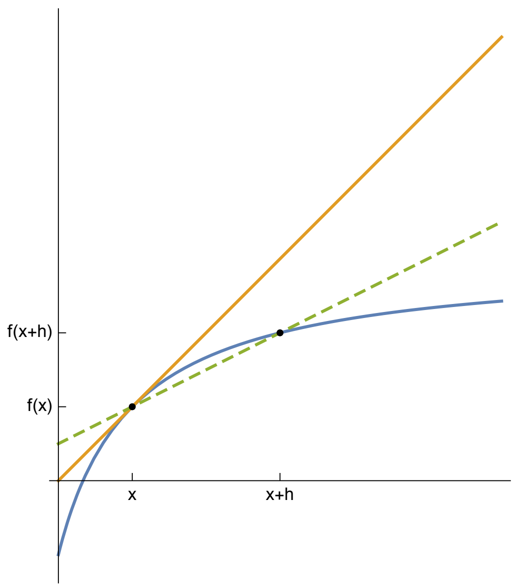
Marcel Délèze
Edition 2017

Thème: Interpolation, §4 Interpolation de dérivées
Lien vers les énoncés des exercices:
www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/interpolation/4-Approx_derivees.pdf

Corrigé de l'exercice 4.1 - 1

a) Dans la figure suivante,
$f'(x)$ représente la pente de la tangente (droite en trait continu);
$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ représente la pente de la sécante (droite en traitillé).



b) Pour les polynômes de degré ≤ 1,

$$f(x) = m\,x + p \quad \text{où} \quad m,\ p \quad \text{constants}$$

$$f'(x) = m$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(m\,(x+h) + p) - (m\,x + p)}{h} = \frac{m\,h}{h} = m$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pour les polynômes de degré 2, il suffit de donner un contre-exemple.

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2\,x$$

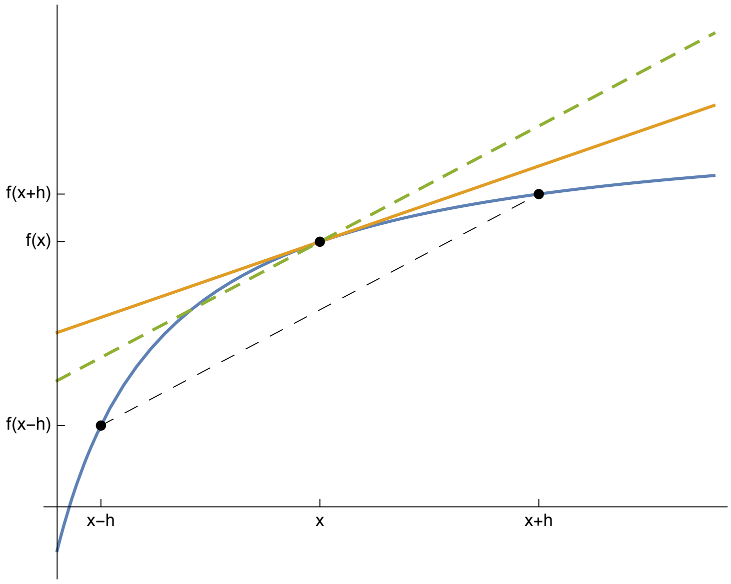
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2\,x\,h + h^2}{h} = 2\,x + h$$

$$f'(x) \neq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Corrigé de l'exercice 4.1 - 2

a) Dans la figure suivante,
* $f'(x)$ représente la pente de la tangente à f en x (droite en trait continu) et

* $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ représente la pente de la sécante qui passe par les deux points $(x-h,\ f(x-h))$, $(x+h,\ f(x+h))$ (en traitillé dans la figure)



b) Pour les polynômes de degré ≤ 2,

$$f(x) = a x^2 + b x + c \quad \text{où} \quad a,\ b,\ c \quad \text{constants}$$

$$f'(x) = 2 a x + b$$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{1}{h}\left(\left(a (x+h)^2 + b (x+h) + c\right) - \left(a (x-h)^2 + b (x-h) + c\right)\right) =$$

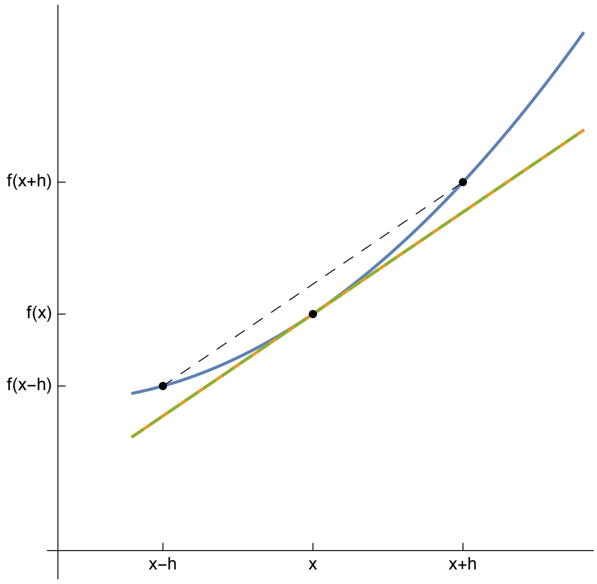
$$\frac{2 a x h + b h - (-2 a x h - b h)}{2h} = 2 a x + b$$

$$\text{Donc} \qquad f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

L'interprétation géométrique de la formule est la suivante: lorsque la fonction f est un polynôme de degré ≤ 2,

* la tangente à f en x (droite en trait continu) et
* la sécante qui passe par les deux points $(x-h,\ f(x-h))$, $(x+h,\ f(x+h))$ (en traitillé)

sont <u>parallèles</u>.



c) Pour les polynômes de degré 3, il suffit de donner un contre-exemple.

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{(x+h)^3 - (x-h)^3}{2h} = \frac{(3x^2 h + h^3) - (-3x^2 h - h^3)}{2h} = 3x^2 + h^2$$

$$f'(x) \neq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Corrigé de l'exercice 4.1 - 3

a) Le débit moyen durant l'intervalle de temps $[t,\ t+h]$ est

$$\overline{d_{[t,\,t+h]}} = \frac{V(t+h) - V(t)}{h}$$

Pour t fixé, faisons tendre h vers 0.

$$\lim_{h\to 0} \overline{d_{[t,\,t+h]}} = \lim_{h\to 0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h}$$

Le débit à l'instant t est égal à la dérivée du volume

$$\boxed{d(t) = V'(t)}$$

b) D'après la formule précédente et la formule d'approximation 4-1,

$$d(t) = V'(t) \approx \frac{V(t+h) - V(t-h)}{2h}$$

$$d(t_1) \approx V'(t_1) \approx \frac{V(t_2) - V(t_0)}{2h}$$

$$d(t_9) \approx V'(t_9) \approx \frac{V(t_{10}) - V(t_8)}{2h}$$

```
n = 11;

x = Range[0, n - 1];
```
plage

```
h = 1;

V = {0., 11.3, 21.8, 31., 38.7, 45, 50.2, 54.5, 58., 61., 63.5}
```

{0., 11.3, 21.8, 31., 38.7, 45, 50.2, 54.5, 58., 61., 63.5}

```
Take[V, 2 - n]
prends
```

{21.8, 31., 38.7, 45, 50.2, 54.5, 58., 61., 63.5}

```
Take[V, n - 2]
prends
```

{0., 11.3, 21.8, 31., 38.7, 45, 50.2, 54.5, 58.}

Les débits instantanés sont

$$d = \frac{1}{2\,h}\left(\underbrace{\text{Take}[V, 2-n]}_{\text{prends}} - \underbrace{\text{Take}[V, n-2]}_{\text{prends}}\right)$$

{10.9, 9.85, 8.45, 7., 5.75, 4.75, 3.9, 3.25, 2.75}

Corrigé de l'exercice 4.1 - 4

a)

```
n = 11;

x = Range[0, n - 1];
      plage

h = 1;

p = {0.8, 0.96, 1.15, 1.38, 1.66, 1.99, 2.39, 2.87, 3.44, 4.13, 4.95}
```

{0.8, 0.96, 1.15, 1.38, 1.66, 1.99, 2.39, 2.87, 3.44, 4.13, 4.95}

```
Take[p, 2 - n]
prends
```

{1.15, 1.38, 1.66, 1.99, 2.39, 2.87, 3.44, 4.13, 4.95}

```
Take[p, n - 2]
prends
```

{0.8, 0.96, 1.15, 1.38, 1.66, 1.99, 2.39, 2.87, 3.44}

Les taux d'accroissement instantanés sont

$$dp = \frac{1}{2\,h}\left(\underbrace{\text{Take}[p, 2-n]}_{\text{prends}} - \underbrace{\text{Take}[p, n-2]}_{\text{prends}}\right)$$

{0.175, 0.21, 0.255, 0.305, 0.365, 0.44, 0.525, 0.63, 0.755}

b)

```
Delete[p, {{1}, {n}}]
supprime
```

{0.96, 1.15, 1.38, 1.66, 1.99, 2.39, 2.87, 3.44, 4.13}

Calculons les rapports

$$\frac{p'(t_1)}{p(t_1)}, \frac{p'(t_2)}{p(t_2)}, \ldots, \frac{p'(t_9)}{p(t_9)}$$

```
dp / Delete[p, {{1}, {n}}]
     supprime
```

{0.182292, 0.182609, 0.184783, 0.183735, 0.183417, 0.1841, 0.182927, 0.18314, 0.182809}

On constate qu'il sont pratiquement constants; le facteur de proportionnalité vaut environ

```
k = 0.183;
```

c) Par hypothèse

$$p(t) = a\, e^{b t}$$
$$p'(t) = a\, b\, e^{b t}$$
$$k = \frac{p'(t)}{p(t)} = \frac{a\, b\, e^{b t}}{a\, e^{b t}} = b$$
$$p(t) = a\, e^{k t}$$
$$p(0) = a\, e^{k\, 0} = a = 0.8$$

Donc

```
Clear[p];
efface
p[t_] := 0.8 e^(k t)
```

```
p[x]
```

{0.8, 0.960652, 1.15356, 1.38522, 1.66339,
 1.99742, 2.39853, 2.88019, 3.45857, 4.15311, 4.98711}

La valeur de *k* paraissant légèrement surestimée, diminuons-la quelque peu pour nous rapprocher des valeurs données

```
k = 0.1823;
```

```
p[x]
```

{0.8, 0.959979, 1.15195, 1.38231, 1.65874,
 1.99044, 2.38848, 2.86611, 3.43926, 4.12702, 4.95232}

Corrigé de l'exercice 4.2 - 1

D'après la formule d'approximation 4-2,

$$a(t) = v'(t) = r''(t) \approx \frac{r(t-h) - 2\, r(t) + r(t+h)}{h^2}$$
$$a(t_1) \approx \frac{r(t_0) - 2\, r(t_1) + r(t_2)}{h^2}$$
$$a(t_9) \approx \frac{r(t_{10}) - 2\, r(t_9) + r(t_8)}{h^2}$$

```
n = 11; h = 1;
x = Range[0, n - 1];
    plage
```

```
r = {0., 0.354, 1., 1.84, 2.83, 3.95, 5.2, 6.55, 8., 9.55, 11.2};
```

```
Delete[r, {{n - 1}, {n}}]
supprime
```

{0., 0.354, 1., 1.84, 2.83, 3.95, 5.2, 6.55, 8.}

```
Delete[r, {{1}, {n}}]
supprime
```

{0.354, 1., 1.84, 2.83, 3.95, 5.2, 6.55, 8., 9.55}

```
Delete[r, {{1}, {2}}]
supprime
```

{1., 1.84, 2.83, 3.95, 5.2, 6.55, 8., 9.55, 11.2}

Les accélérations sont

$$a = \frac{1}{h^2} \left(\text{Delete}[r, \{\{n-1\}, \{n\}\}] - 2\,\text{Delete}[r, \{\{1\}, \{n\}\}] + \text{Delete}[r, \{\{1\}, \{2\}\}]\right)$$

supprime supprime supprime

{0.292, 0.194, 0.15, 0.13, 0.13, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1}