Marcel Délèze
Edition 2017

Thème: Interpolation, §2 Interpolation orthogonale
Lien vers les énoncés des exercices:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/interpolation/2-Interpolation_orthogonale.pdf

Corrigé de l'exercice 2.1-1

$$L_0(t) = \frac{(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(t-1)(t-2)(t-5)}{(-1-1)(-1-2)(-1-5)} = \frac{(t-1)(t-2)(t-5)}{-36}$$

$$L_1(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_2)(t-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(t+1)(t-2)(t-5)}{(1+1)(1-2)(1-5)} = \frac{(t+1)(t-2)(t-5)}{8}$$

$$L_2(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_1)(t-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(t+1)(t-1)(t-5)}{(2+1)(2-1)(2-5)} = \frac{(t+1)(t-1)(t-5)}{-9}$$

$$L_3(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_1)(t-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(t+1)(t-1)(t-2)}{(5+1)(5-1)(5-2)} = \frac{(t+1)(t-1)(t-2)}{72}$$

$$g(t) = y_0 L_0(t) + y_1 L_1(t) + y_2 L_2(t) + y_3 L_3(t) =$$
$$2\,\frac{(t-1)(t-2)(t-5)}{-36} + (-1)\,\frac{(t+1)(t-2)(t-5)}{8} + 3\,\frac{(t+1)(t-1)(t-5)}{-9} + (-7)\,\frac{(t+1)(t-1)(t-2)}{72}$$

Corrigé de l'exercice 2.1-2

a) Prouvons d'abord que la matrice d'interpolation est l'identité (c'est-à-dire la matrice est diagonale et tous les termes diagonaux valent 1)

$$\text{pour } i = 0, \ldots, n-1, \quad \text{on a} \quad L_i(x_i) = 1;$$
$$\text{pour } i \neq j, \quad \text{on a} \quad L_i(x_j) = 0$$

En effet,

$$L_0(x_0) = \frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})} = 1$$

$$L_1(x_1) = \frac{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})} = 1, \quad \ldots,$$

$$L_{n-1}(x_{n-1}) = \frac{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})} = 1$$

$$L_0(x_1) = \frac{(x_1-x_1)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})} = 0$$

$$L_0(x_2) = \frac{(x_2-x_1)(x_2-x_2)\ldots(x_2-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})} = 0, \quad \ldots,$$

$$L_0(x_{n-1}) = \frac{(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\ldots(x_{n-1}-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})} = 0$$

$$L_1(x_0) = \frac{(x_0-x_0)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})} = 0$$

$$L_1(x_2) = \frac{(x_2-x_0)(x_2-x_2)\ldots(x_2-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})} = 0$$

etc.

b) Il s'ensuit que

$$g(t) = y_0 L_0(t) + y_1 L_1(t) + y_2 L_2(t) + \ldots + y_{n-1} L_{n-1}(t) \quad \text{est un polynôme de degré} \quad \leq (n-1)$$

$$g(x_0) = y_0 L_0(x_0) + y_1 L_1(x_0) + y_2 L_2(x_0) + \ldots + y_{n-1} L_{n-1}(x_0) = y_0 \cdot 1 + y_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 0 + \ldots + y_{n-1} \cdot 0 = y_0$$

$$g(x_1) = y_0 L_0(x_1) + y_1 L_1(x_1) + y_2 L_1(x_1) + \ldots + y_{n-1} L_{n-1}(x_1) = y_0 \cdot 0 + y_1 \cdot 1 + y_1 \cdot 0 + \ldots + y_{n-1} \cdot 0 = y_1$$

$$\ldots$$

$$g(x_{n-1}) = y_0 L_0(x_{n-1}) + y_1 L_1(x_{n-1}) + y_2 L_2(x_{n-1}) + \ldots + y_{n-1} L_{n-1}(x_{n-1}) =$$
$$y_0 \cdot 0 + y_1 \cdot 0 + y_2 \cdot 0 + \ldots + y_{n-1} \cdot 1 = y_{n-1} \qquad \blacksquare$$

Corrigé de l'exercice 2.1-3

```
x = Range[-3, 3];
    plage
```

```
n = Length[x];
    longueur
```

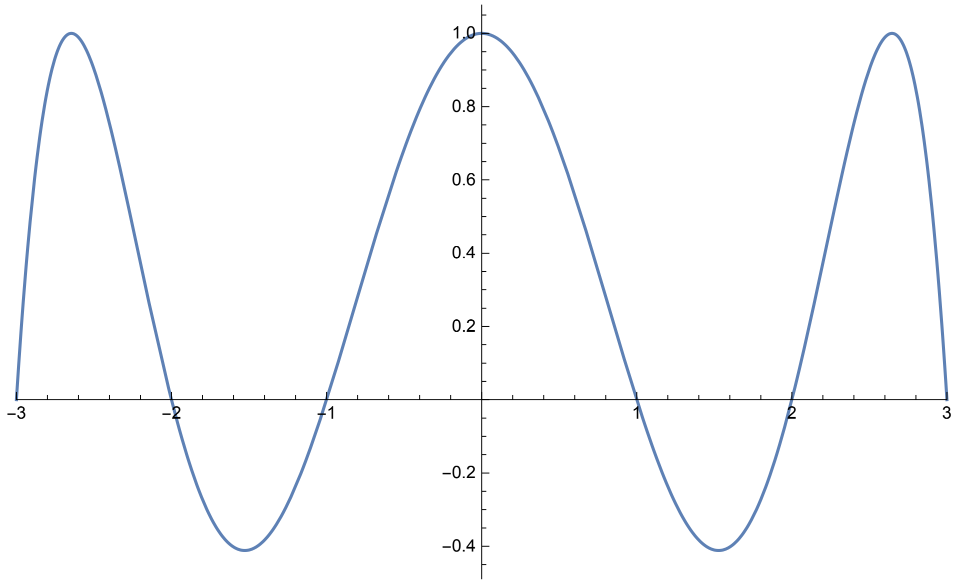
```
Clear[b, t, L, g]
efface
```

```
b[t_] = Table[Apply[Times, Delete[t - x, i]] / Apply[Times, Delete[x[[i]] - x, i]], {i, 1, n}]
        table
```

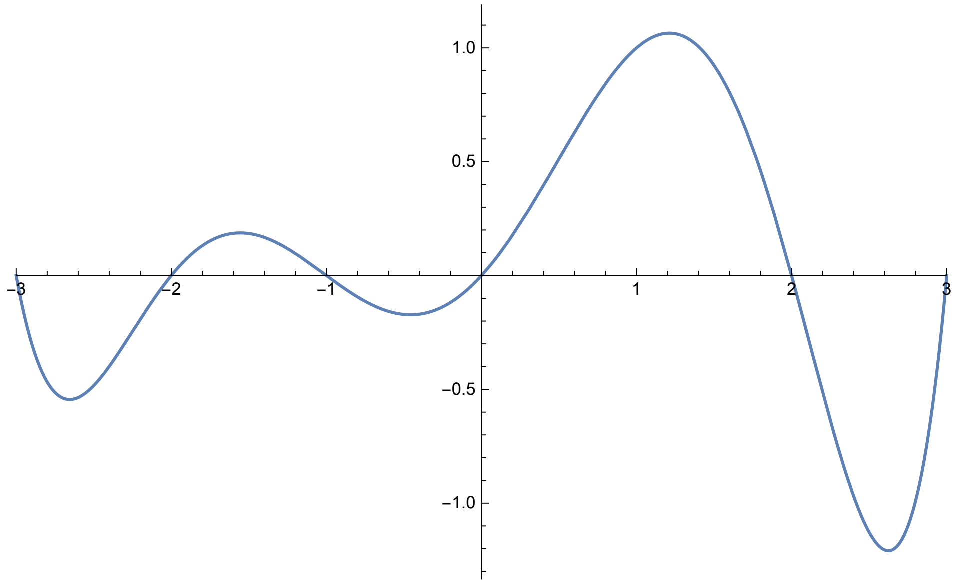
$$\left\{\frac{1}{720}(-3+t)(-2+t)(-1+t)\,t\,(1+t)(2+t),\right.$$
$$-\frac{1}{120}(-3+t)(-2+t)(-1+t)\,t\,(1+t)(3+t),$$
$$\frac{1}{48}(-3+t)(-2+t)(-1+t)\,t\,(2+t)(3+t),$$
$$-\frac{1}{36}(-3+t)(-2+t)(-1+t)(1+t)(2+t)(3+t),$$
$$\frac{1}{48}(-3+t)(-2+t)\,t\,(1+t)(2+t)(3+t),\ -\frac{1}{120}(-3+t)(-1+t)\,t\,(1+t)(2+t)(3+t),$$
$$\left.\frac{1}{720}(-2+t)(-1+t)\,t\,(1+t)(2+t)(3+t)\right\}$$

```
L[i_Integer][t_] := b[t][[i + 1]]
  dans
```

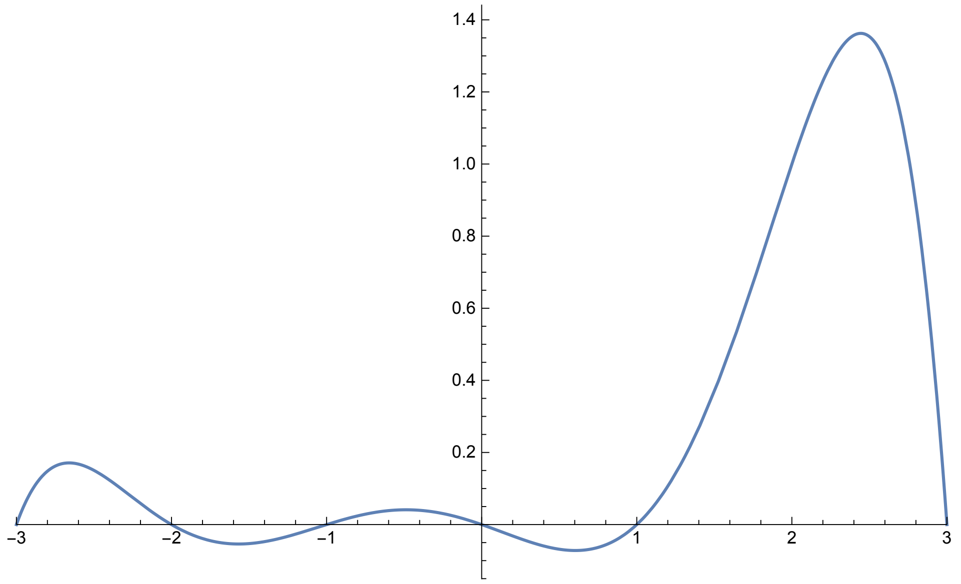
```
Plot[L[3][t], {t, -3, 3}, PlotRange → {{-3, 3}, All}]
```
tracé de courbes zone de tracé tout



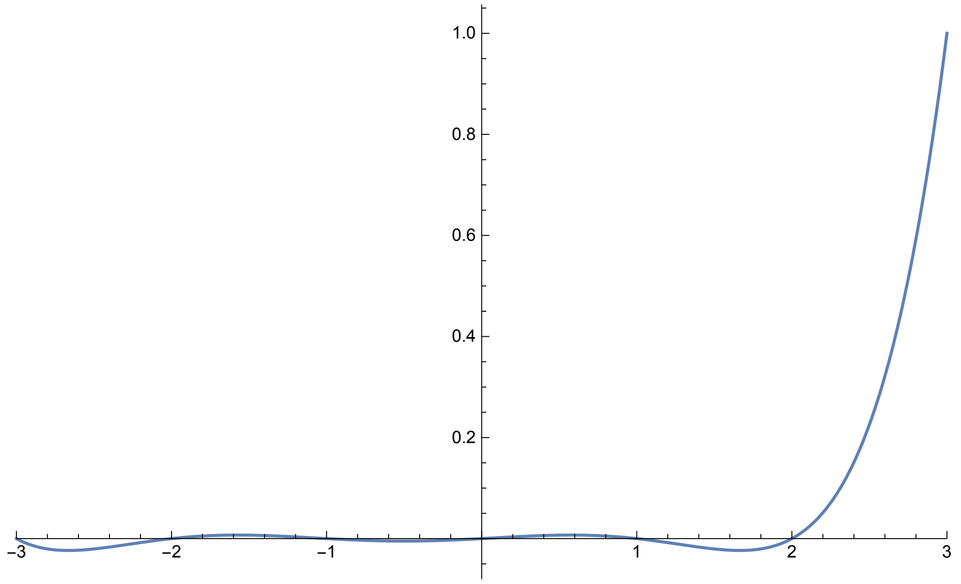

```
Plot[L[4][t], {t, -3, 3}, PlotRange → {{-3, 3}, All}]
```
tracé de courbes zone de tracé tout



```
Plot[L[5][t], {t, -3, 3}, PlotRange → {{-3, 3}, All}]
```
tracé de courbes zone de tracé tout




```
Plot[L[6][t], {t, -3, 3}, PlotRange → {{-3, 3}, All}]
```
tracé de courbes zone de tracé tout



Corrigé de l'exercice 2.1-4 [facultatif]

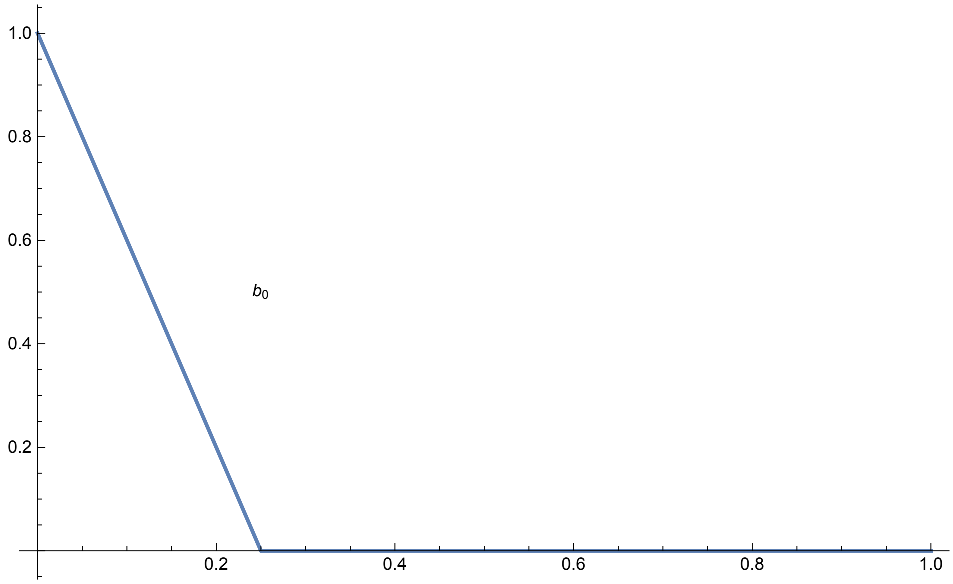
a) L'interpolation linéaire par morceaux se prêtant mal à l'extrapolation, nous supposons que $x_0 \leq t \leq x_{n-1}$.

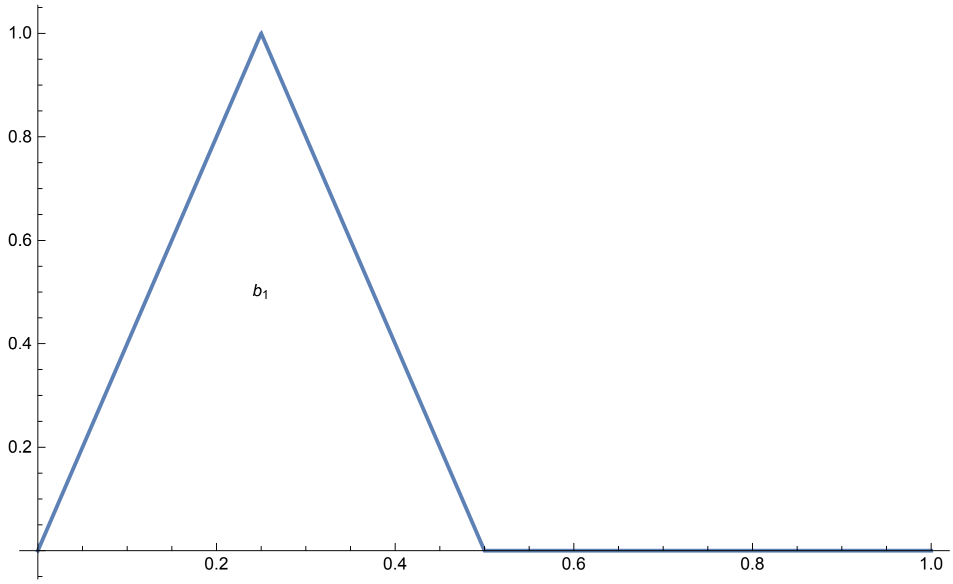
$b_i(t)$ est une fonction affine par morceaux qui vérifie $b_i(x_{i-1}) = 0$; $b_i(x_i) = 1$; $b_i(x_{i+1}) = 0$;

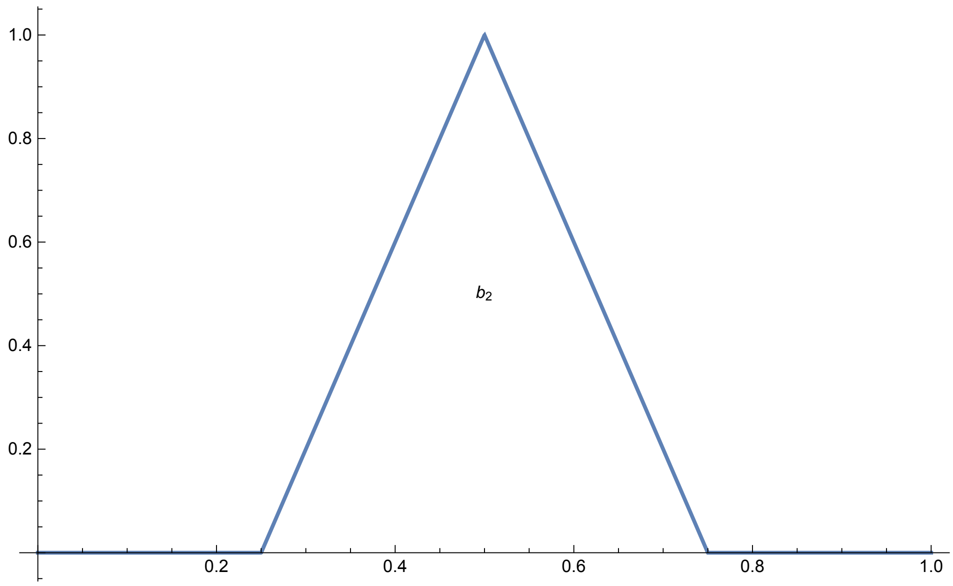
$$b_i(t) = \frac{t - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad \text{pour} \quad x_{i-1} \leq t \leq x_i$$

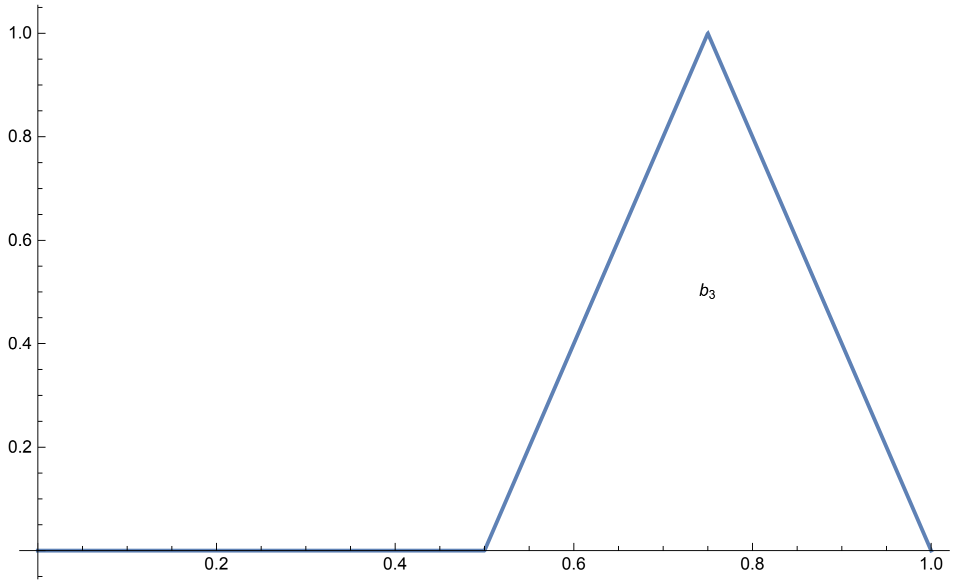
$$b_i(t) = \frac{x_{i+1} - t}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{pour} \quad x_i \leq t \leq x_{i+1}$$

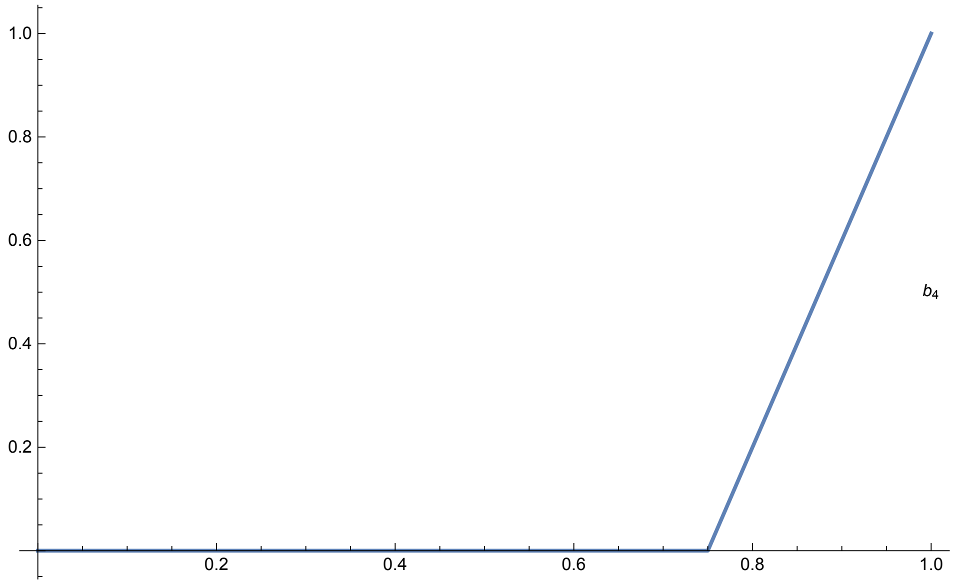
$b_i(t) = 0$ ailleurs


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
b_0


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
b_1


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
b_2





b) Fonctions de base

$$b_0(t) = \frac{x_0 - t}{x_0 - x_1} \quad \text{pour} \quad x_0 \le t \le x_1$$

$$b_0(t) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

$$b_1(t) = \frac{t - x_0}{x_1 - x_0} \quad \text{pour} \quad x_0 \le t \le x_1$$

$$b_1(t) = \frac{x_2 - t}{x_2 - x_1} \quad \text{pour} \quad x_1 \le t \le x_2$$

$$b_1(t) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

$$b_2(t) = \frac{t - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{pour} \quad x_1 \le t \le x_2$$

$$b_2(t) = \frac{x_3 - t}{x_3 - x_2} \quad \text{pour} \quad x_2 \le t \le x_3$$

$$b_2(t) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

$$b_3(t) = \frac{t - x_2}{x_3 - x_2} \quad \text{pour} \quad x_2 \le t \le x_3$$

$$b_3(t) = \frac{x_4 - t}{x_4 - x_3} \quad \text{pour} \quad x_3 \le t \le x_4$$

$$b_3(t) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

$$b_4(t) = \frac{t - x_3}{x_4 - x_3} \quad \text{pour} \quad x_3 \le t \le x_4$$

$$b_4(t) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

c) Application: 0.6 est situé dans l'intervalle $[0.5;\ 0.75] = [x_2,\ x_3]$

$$g(0.6) = y_0\, b_0(0.6) + y_1\, b_1(0.6) + y_2\, b_2(0.6) + y_3\, b_3(0.6) + y_4\, b_4(0.6) =$$

$$y_0 \cdot 0 + y_1 \cdot 0 + y_2 \frac{x_3 - 0.6}{x_3 - x_2} + y_3 \frac{0.6 - x_2}{x_3 - x_2} + y_4 \cdot 0 =$$

$$y_2 \frac{0.75 - 0.6}{0.25} + y_3 \frac{0.6 - 0.5}{0.25} = 0.6\, y_2 + 0.4\, y_3$$

Corrigé de l'exercice 2.2-1

$$pts = \left\{\{0, -3.\}, \left\{2 + \frac{29}{30}, 5.\right\}, \left\{5 + \frac{14}{30}, 15.\right\}, \left\{8 + \frac{14}{30}, 8.\right\}\right\};$$

$$x = \left\{0, \frac{89}{30}, \frac{82}{15}, \frac{127}{15}\right\}; \; n = \text{Length}[x]$$

longueur

4

```
y = {-3., 5., 15., 8.}; Clear[b, t, g];
```

efface

$$b[t\_] := \left\{1, \text{Cos}\left[\frac{2\pi}{12} t\right], \text{Sin}\left[\frac{2\pi}{12} t\right], \text{Cos}\left[\frac{2\pi}{6} t\right]\right\};$$

cosinus sinus cosinus

```
m = Map[b, x]; MatrixForm[m]
```

applique apparence matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \text{Sin}\left[\frac{\pi}{180}\right] & \text{Cos}\left[\frac{\pi}{180}\right] & -\text{Cos}\left[\frac{\pi}{90}\right] \\ 1 & -\text{Cos}\left[\frac{4\pi}{45}\right] & \text{Sin}\left[\frac{4\pi}{45}\right] & \text{Cos}\left[\frac{8\pi}{45}\right] \\ 1 & -\text{Sin}\left[\frac{4\pi}{45}\right] & -\text{Cos}\left[\frac{4\pi}{45}\right] & -\text{Cos}\left[\frac{8\pi}{45}\right] \end{pmatrix}$$

```
e = Transpose[m];
```

transposée

Calculons tous les produits scalaires de deux colonnes

```
Table[N[e[[i]].e[[j]]], {i, 1, n}, {j, 1, n}] // MatrixForm
```

table valeur numérique apparence matricielle

$$\begin{pmatrix} 4. & -0.219447 & 0.314223 & 0.000609173 \\ -0.219447 & 2.0003 & 0.0174497 & 0.401116 \\ 0.314223 & 0.0174497 & 1.9997 & 0.0497113 \\ 0.000609173 & 0.401116 & 0.0497113 & 3.43715 \end{pmatrix}$$

Donc l'interpolation n'est pas orthogonale.

Dans le théorème 2-2, les abscisses à utiliser ici auraient du être

$$x_0 = 0; \quad x_1 = \frac{12}{4} = 3; \quad x_2 = 2\,\frac{12}{4} = 6; \quad x_3 = 3\,\frac{12}{4} = 9;$$

[Facultatif] Vérifions qu'en satisfaisant les hypothèses du théorème 2-2, on obtient une matrice orthogonale

```
x = {0, 3, 6, 9};
```

```
m = Map[b, x]; MatrixForm[m]
```

applique apparence matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
e = Transpose[m];
```

transposée

```
Table[N[e[[i]].e[[j]]], {i, 1, n}, {j, 1, n}] // MatrixForm
```
table valeur numérique apparence matricielle

$$\begin{pmatrix} 4. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 2. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 2. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 4. \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 2.2-2

$$n = 12;\ T = 365;\ \omega = \frac{2\pi}{T};$$

$$x = \text{Table}\left[j\,\frac{T}{n},\ \{j, 0, n-1\}\right]$$
table

$$\left\{0,\ \frac{365}{12},\ \frac{365}{6},\ \frac{365}{4},\ \frac{365}{3},\ \frac{1825}{12},\ \frac{365}{2},\ \frac{2555}{12},\ \frac{730}{3},\ \frac{1095}{4},\ \frac{1825}{6},\ \frac{4015}{12}\right\}$$

```
Clear[b, t];
```
efface

```
b[t_] = {1, Cos[ω t], Sin[ω t], Cos[2 ω t], Sin[2 ω t], Cos[3 ω t],
   Sin[3 ω t], Cos[4 ω t], Sin[4 ω t], Cos[5 ω t], Sin[5 ω t], Cos[6 ω t]};
```
cosinus sinus cosinus sinus cosinus
sinus cosinus sinus cosinus sinus cosinus

```
y = {-1, 1, 4, 8, 12, 15, 18, 17, 14, 9, 4, 1};
```

```
m = Map[b, x]; MatrixForm[m]
```
applique apparence matriciel

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\
1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\
1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\
1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\
1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
1 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\
1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -1
\end{pmatrix}$$

```
e = Transpose[m];
```
transposée

```
Table[N[e[[i]].e[[j]]], {i, 1, n}, {j, 1, n}]
```
table valeur numérique

```
{{12., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.},
 {0., 6., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.},
 {0., 0., 6., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.},
 {0., 0., 0., 6., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.},
 {0., 0., 0., 0., 6., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.},
 {0., 0., 0., 0., 0., 6., 0., 0., 0., 0., 0., 0.},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0., 6., 0., 0., 0., 0., 0.},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 6., 0., 0., 0., 0.},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 6., 0., 0., 0.},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 6., 0., 0.},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 6., 0.},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 12.}}
```

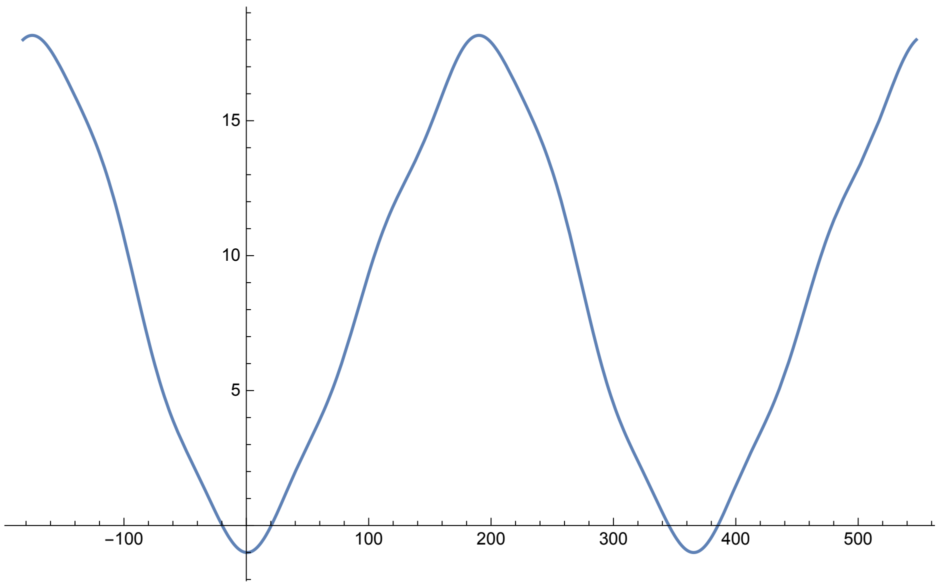
$$c = \text{Table}\left[\frac{y.e[[k]]}{e[[k]].e[[k]]}, \{k, 1, n\}\right]$$
table

$$\left\{\frac{17}{2}, \frac{1}{6}\left(-28-15\sqrt{3}\right), \frac{1}{6}\left(-2-\sqrt{3}\right), 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0, 0, \frac{1}{6}\left(-28+15\sqrt{3}\right), \frac{1}{6}\left(-2+\sqrt{3}\right), 0\right\}$$

```
g[t_] = c.b[t]
```

$$\frac{17}{2}+\frac{1}{6}\left(-28-15\sqrt{3}\right)\text{Cos}\left[\frac{2\pi t}{365}\right]-\frac{1}{6}\text{Cos}\left[\frac{6\pi t}{365}\right]+\frac{1}{6}\left(-28+15\sqrt{3}\right)\text{Cos}\left[\frac{2\pi t}{73}\right]+\frac{1}{6}\left(-2-\sqrt{3}\right)\text{Sin}\left[\frac{2\pi t}{365}\right]+\frac{\text{Sin}\left[\frac{4\pi t}{365}\right]}{\sqrt{3}}-\frac{1}{6}\text{Sin}\left[\frac{6\pi t}{365}\right]+\frac{1}{6}\left(-2+\sqrt{3}\right)\text{Sin}\left[\frac{2\pi t}{73}\right]$$

```
Plot[g[t], {t, -0.5` × 365, 1.5` × 365}]
```
tracé de courbes



La température moyenne annuelle

```
Apply[Plus, y]
      12
```

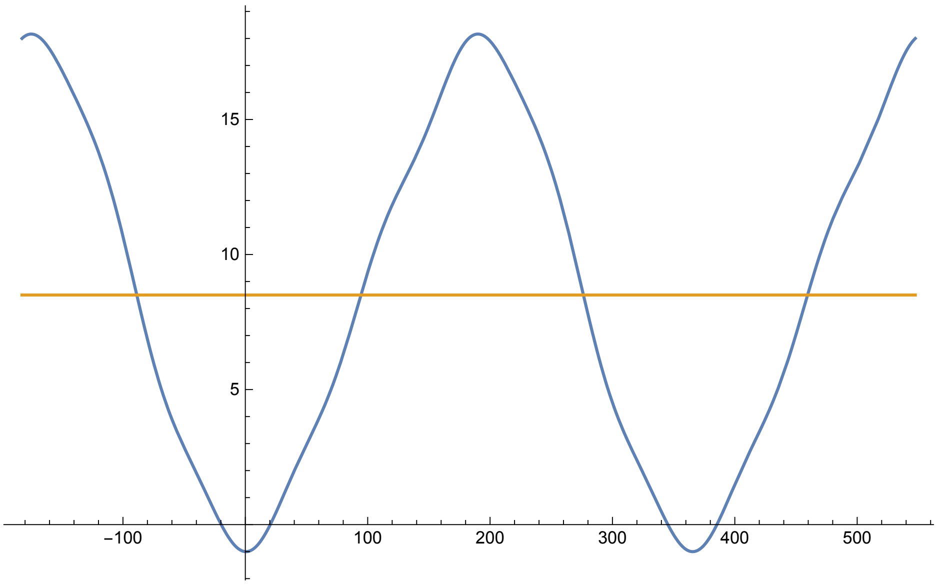
$\frac{17}{2}$

est égale au coefficient c_0

```
c[[1]]
```

$\frac{17}{2}$

```
Plot[{g[t], 17/2}, {t, -0.5` × 365, 1.5` × 365}]
```
tracé de courbes



En effet, les autres termes de $g(t)$ sont périodiques et leur moyenne annuelle est nulle.
Si on découpe l'année en deux parties égales "saison chaude" et "saison froide", les transitions se font aux dates suivantes:

```
s1 = FindRoot[g[t] == 17/2, {t, 90}]
```
trouve racine

{t → 94.4738}

D'après le tableau, le 94-ème jour correspond au **20 avril**

```
s2 = FindRoot[g[t] == 17/2, {t, 280}]
```
trouve racine

{t → 276.315}

D'après le tableau, le 276-ème jour correspond au **19 octobre**

Par rapport aux équinoxes du 20 mars et du 23 septembre, il y a un <u>retard de 26 à 31 jours</u>. Ce décalage s'explique par l'inertie thermique.

Corrigé de l'exercice 2.2-3

Échantillonnage

```
n = 9;
```

$$x = \text{Table}\left[j\,\frac{2\pi}{9},\ \{j, 0, n-1\}\right]$$

table

$$\left\{0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{4\pi}{3}, \frac{14\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}\right\}$$

$$f[t\_] := 3\,\text{Cos}[t]^4 - 5\,\text{Sin}[t]^3$$

```
y = Map[f, x]
```

applique

$$\left\{3,\ 3\,\text{Cos}\left[\frac{2\pi}{9}\right]^4 - 5\,\text{Sin}\left[\frac{2\pi}{9}\right]^3,\ -5\,\text{Cos}\left[\frac{\pi}{18}\right]^3 + 3\,\text{Sin}\left[\frac{\pi}{18}\right]^4,\ \frac{3}{16} - \frac{15\sqrt{3}}{8},\ 3\,\text{Cos}\left[\frac{\pi}{9}\right]^4 - 5\,\text{Sin}\left[\frac{\pi}{9}\right]^3,\right.$$
$$\left. 3\,\text{Cos}\left[\frac{\pi}{9}\right]^4 + 5\,\text{Sin}\left[\frac{\pi}{9}\right]^3,\ \frac{3}{16} + \frac{15\sqrt{3}}{8},\ 5\,\text{Cos}\left[\frac{\pi}{18}\right]^3 + 3\,\text{Sin}\left[\frac{\pi}{18}\right]^4,\ 3\,\text{Cos}\left[\frac{2\pi}{9}\right]^4 + 5\,\text{Sin}\left[\frac{2\pi}{9}\right]^3\right\}$$

Matrice d'interpolation

```
b[t_] = {1, Cos[t], Sin[t], Cos[2 t], Sin[2 t], Cos[3 t], Sin[3 t], Cos[4 t], Sin[4 t]};
```

cosinus sinus cosinus sinus cosinus sinus cosinus sinus

```
m = Map[b, x]; MatrixForm[m]
```

applique apparence matriciel

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & \text{Cos}\left[\frac{2\pi}{9}\right] & \text{Sin}\left[\frac{2\pi}{9}\right] & \text{Sin}\left[\frac{\pi}{18}\right] & \text{Cos}\left[\frac{\pi}{18}\right] & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\text{Cos}\left[\frac{\pi}{9}\right] & \text{Sin}\left[\frac{\pi}{9}\right] \\
1 & \text{Sin}\left[\frac{\pi}{18}\right] & \text{Cos}\left[\frac{\pi}{18}\right] & -\text{Cos}\left[\frac{\pi}{9}\right] & \text{Sin}\left[\frac{\pi}{9}\right] & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{Cos}\left[\frac{2\pi}{9}\right] & -\text{Sin}\left[\frac{2\pi}{9}\right] \\
1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\
1 & -\text{Cos}\left[\frac{\pi}{9}\right] & \text{Sin}\left[\frac{\pi}{9}\right] & \text{Cos}\left[\frac{2\pi}{9}\right] & -\text{Sin}\left[\frac{2\pi}{9}\right] & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{Sin}\left[\frac{\pi}{18}\right] & -\text{Cos}\left[\frac{\pi}{18}\right] \\
1 & -\text{Cos}\left[\frac{\pi}{9}\right] & -\text{Sin}\left[\frac{\pi}{9}\right] & \text{Cos}\left[\frac{2\pi}{9}\right] & \text{Sin}\left[\frac{2\pi}{9}\right] & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{Sin}\left[\frac{\pi}{18}\right] & \text{Cos}\left[\frac{\pi}{18}\right] \\
1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
1 & \text{Sin}\left[\frac{\pi}{18}\right] & -\text{Cos}\left[\frac{\pi}{18}\right] & -\text{Cos}\left[\frac{\pi}{9}\right] & -\text{Sin}\left[\frac{\pi}{9}\right] & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{Cos}\left[\frac{2\pi}{9}\right] & \text{Sin}\left[\frac{2\pi}{9}\right] \\
1 & \text{Cos}\left[\frac{2\pi}{9}\right] & -\text{Sin}\left[\frac{2\pi}{9}\right] & \text{Sin}\left[\frac{\pi}{18}\right] & -\text{Cos}\left[\frac{\pi}{18}\right] & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\text{Cos}\left[\frac{\pi}{9}\right] & -\text{Sin}\left[\frac{\pi}{9}\right]
\end{pmatrix}$$

Vérifions que la matrice d'interpolation *m* est orthogonale:

```
e = Transpose[m];
```

transposée

```
MatrixForm[Table[FullSimplify[e[[i]].e[[j]]], {i, 1, n}, {j, 1, n}]]
```
apparence m·· table simplifie complètement

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Résolution du système, c'est-à-dire calcul des coefficients (de Fourier)

$$c = N\left[\mathrm{Table}\left[\frac{y.e[[k]]}{e[[k]].e[[k]]}, \{k, 1, n\}\right]\right]$$
·· table

$$\{1.125, -3.94746\times10^{-16}, -3.75, 1.5, 2.96059\times10^{-16}, -1.97373\times10^{-16}, 1.25, 0.375, 0.\}$$

Les valeurs numériques précédentes peuvent être interprétées comme des approximations des valeurs exactes suivantes

$$c = \left\{\frac{9}{8}, 0, -\frac{15}{4}, \frac{3}{2}, 0, 0, \frac{5}{4}, \frac{3}{8}, 0\right\};$$

```
g[t_] = c.b[t]
```

$$\frac{9}{8} + \frac{3}{2}\mathrm{Cos}[2\,t] + \frac{3}{8}\mathrm{Cos}[4\,t] - \frac{15\,\mathrm{Sin}[t]}{4} + \frac{5}{4}\mathrm{Sin}[3\,t]$$

Vérifions que l'interpolant coïncide partout avec la fonction

```
FullSimplify[g[t] - f[t]]
```
simplifie complètement

0

Finalement, pour tout *t*,

$$\boxed{3\cos^4(t) - 5\sin^3(t) = \frac{9}{8} - \frac{15}{4}\sin(t) + \frac{3}{2}\cos(2\,t) + \frac{5}{4}\sin(3\,t) + \frac{3}{8}\cos(4\,t)}$$