Marcel Délèze
Edition 2017

Thème : Initiation à Mathematica, § 2 Premiers principes

Lien vers les énoncés des exercices:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/initiation_mathematica/2_premiers_principes.pdf

Corrigé de l'exercice 2 - 1

```
a = Table[11 + 5 i, {i, 0, 19}]
```

{11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71, 76, 81, 86, 91, 96, 101, 106}

```
b = Table[3 × 2^i, {i, 0, 11}]
```

{3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536, 3072, 6144}

La fonction est $k \mapsto \cos\left(k \frac{2\pi}{7}\right)$ est périodique de période 7 car

$$\cos\left((k+7)\frac{2\pi}{7}\right) = \cos\left(k\frac{2\pi}{7} + 2\pi\right) = \cos\left(k\frac{2\pi}{7}\right)$$

De plus, dans la liste

```
N[Table[Cos[k 2π/7], {k, 0, 6}]]
```

{1., 0.62349, -0.222521, -0.900969, -0.900969, -0.222521, 0.62349}

les trois dernières valeurs sont des répétitions des quatre premières. Finalement, la réponse est

```
c = Table[Cos[k 2π/7], {k, 0, 3}]
```

$\left\{1, \mathrm{Sin}\left[\frac{3\pi}{14}\right], -\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{14}\right], -\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{7}\right]\right\}$

Corrigé de l'exercice 2 - 2

```
α = 7.5 °; Cos[α]
```

0.991445

```
Sin[α]
```

0.130526

```
Sin[48 α]
```

-2.44929×10^{-16}

Le calcul a été effectué avec une mantisse tronquée à environ 16 chiffres caractéristiques. Le résultat n'est qu'une approximation numérique. La valeur exacte est $\sin(48\,\alpha) = \sin(360\,°) = 0$. On peut obtenir une valeur exacte en remplaçant les nombres écrits en virgule flottante (7.5) par des nombres rationnels ($\frac{75}{10}$).

```
α = 75 °/10
```

$\frac{15\,°}{2}$

```
Sin[48 α]
sinus
```

0

Exercice 2-3

```
prixUnitaire = 5 fr/piece;
quantite = 42 piece;
prix = prixUnitaire quantite
```

210 fr

Mathematica a effectué un calcul algébrique avec les symboles *fr* et *piece*: l'expression résultante a été simplifiée par *piece*.

```
acceleration = m/s^2;
newton = kg acceleration;
joule = newton m;
watt = joule/s;
watt/m^2
```

$\frac{\text{kg}}{\text{s}^3}$

Nous avons converti l'unité de puissance sonore, le $\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}$, en unités fondamentales du système international d'unités.

Exercice 2-4

```
Clear[a, b, c, x]
efface
```

```
Simplify[(a^3 + b^3)/(a + b)]
simplifie
```

$a^2 - a\,b + b^2$

```
a = (1 - x)/(1 - x + x^2);
b = (1 + x)/(1 + x + x^2);
c = (a + b)/(b - a);
Simplify[c]
```
simplifie

$$\frac{1}{x^3}$$

```
Clear[f, x];
```
efface

```
f[x_] := x^2 (x + 15) + 75 (x - 1) + 50
```

```
Reduce[f[x] > 0, x, Reals]
```
réduis　　nombres

x > Root[-25 + 75 #1 + 15 #1^2 + #1^3 &, 1]

```
N[Reduce[f[x] > 0, x]]
```
·· réduis

x > 0.313293

```
N[Reduce[f[x] == 0, x, Reals]]
```
·· réduis　　nombres ré

x == 0.313293

```
N[Reduce[f[x] < 0, x, Reals]]
```
·· réduis　　nombres re

x < 0.313293

```
TableForm[{{-∞, "", 0.313293, "", ∞}, {" - ", "  -  ", 0, "  +  ", " + "}},
 TableHeadings → {{"x", "Signe(f(x))"}, None}]
```
forme de table
en-têtes de table　　aucun

x	-∞		0.313293		∞
Signe(f(x))	-	-	0	+	+

```
Reduce[2 Cos[x]^2 == Cos[x] + 1 ∧ 0 ≤ x ≤ π, x, Reals]
```
réduis　　cosinus　　nombres

$x == 0 \,||\, x == \frac{2\pi}{3}$

Exercice 2-5

```
a = 2;
b = 3;
hyp = Sqrt[a^2 + b^2];
N[hyp]
```
valeur numérique

3.60555

$\text{Tan}[\alpha] = \frac{a}{b}$

$\alpha = \text{ArcTan}\left[\frac{a}{b}\right]$
arc tangente

$\text{ArcTan}\left[\frac{2}{3}\right]$

Pour convertir en degrés :

$N\left[\frac{\alpha * 180}{\pi}\right]$
valeur numérique

33.6901

Exercice 2-6

$\text{NumberForm}\left[N\left[\sqrt[3]{9876}, 12\right]\right]$
apparence ⋯ valeur numérique

21.4549263032

NumberForm[N[Cos[70 °], 12]]
apparence ⋯ ⋯ cosinus

0.342020143326

$\text{Simplify}\left[\frac{x^4 - y^4}{x^3 - x^2 y + x y^2 - y^3}\right]$
simplifie

$x + y$

Exercice 2-7

$a = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$

$\frac{\pi^2}{6}$

$b = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$

2

$c = N\left[\sum_{i=1}^{10000} \frac{1}{i}\right]$
valeur numérique

9.78761

Exercice 2-8

$$\text{Reduce}\left[\frac{1}{x-3}+\frac{3}{x+1}\leq\frac{x}{x^2-2x-3},\ x,\ \text{Reals}\right]$$
réduis nombres

$$x<-1\ ||\ \frac{8}{3}\leq x<3$$

$$S=\left]-\infty;\ -1\right[\bigcup\left[\frac{8}{3};\ 3\right[$$

$$\text{Reduce}\left[\frac{1}{x-3}+\frac{3}{x+1}\leq\frac{x}{x^2-2x-3}\wedge x^2\geq 8,\ x,\ \text{Reals}\right]$$
réduis nombres

$$x\leq -2\sqrt{2}\ ||\ 2\sqrt{2}\leq x<3$$

$$S=\left]-\infty;\ -2\sqrt{2}\right]\bigcup\left[2\sqrt{2};\ 3\right[$$

Exercice 2-9

```
Clear[f, x];
```
effface

$$f[x\_] := 3x^3+4x^2-19x+10$$

```
Reduce[f[x] == 0, x, Reals]
```
réduis nombres

$$x==\frac{2}{3}\ ||\ x==-1-\sqrt{6}\ ||\ x==-1+\sqrt{6}$$

```
Reduce[f[x] < 0, x, Reals]
```
réduis nombres

$$x<-1-\sqrt{6}\ ||\ \frac{2}{3}<x<-1+\sqrt{6}$$

```
Reduce[f[x] > 0, x, Reals]
```
réduis nombres

$$-1-\sqrt{6}<x<\frac{2}{3}\ ||\ x>-1+\sqrt{6}$$

$$\text{TableForm}\left[\left\{\left\{-\infty,\ "",\ -1-\sqrt{6},\ "",\ \frac{2}{3},\ "",\ -1+\sqrt{6},\ "",\ \infty\right\},\right.\right.$$
forme de table

```
{" - ", " - ", 0, " + ", 0, " - ", 0, " + ", " + "}},
TableHeadings → {{"x", "sign(f(x))"}, None}]
```
en-têtes de table aucun

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{6}$		$\frac{2}{3}$		$-1+\sqrt{6}$		∞
sign(f(x))	−	−	0	+	0	−	0	+	+

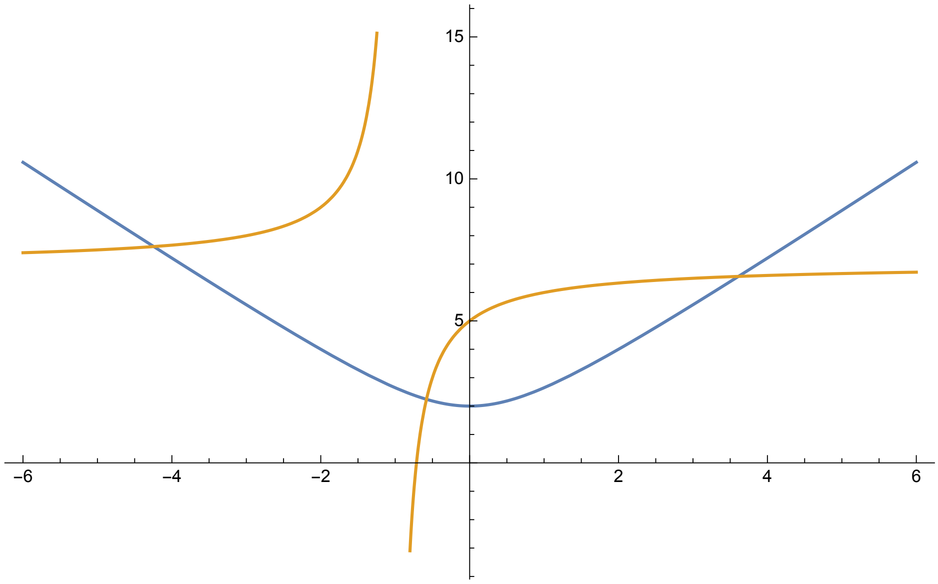
```
Reduce[√(3 x² + 4) == (7 x + 5)/(x + 1), x, Reals]
```
réduis — nombres

x == Root[-21 - 62 #1 - 42 #1^2 + 6 #1^3 + 3 #1^4 &, 1] || x == Root[-21 - 62 #1 - 42 #1^2 + 6 #1^3 + 3 #1^4 &, 3] || x == Root[-21 - 62 #1 - 42 #1^2 + 6 #1^3 + 3 #1^4 &, 4]

```
N[Reduce[√(3 x² + 4) == (7 x + 5)/(x + 1), x, Reals]]
```
réduis — nombres ré

x == -4.24318 || x == -0.579998 || x == 3.61089

```
Plot[{√(3 x² + 4), (7 x + 5)/(x + 1)}, {x, -6, 6}, ImageSize → {500, 300}]
```
tracé de courbes — taille d'image



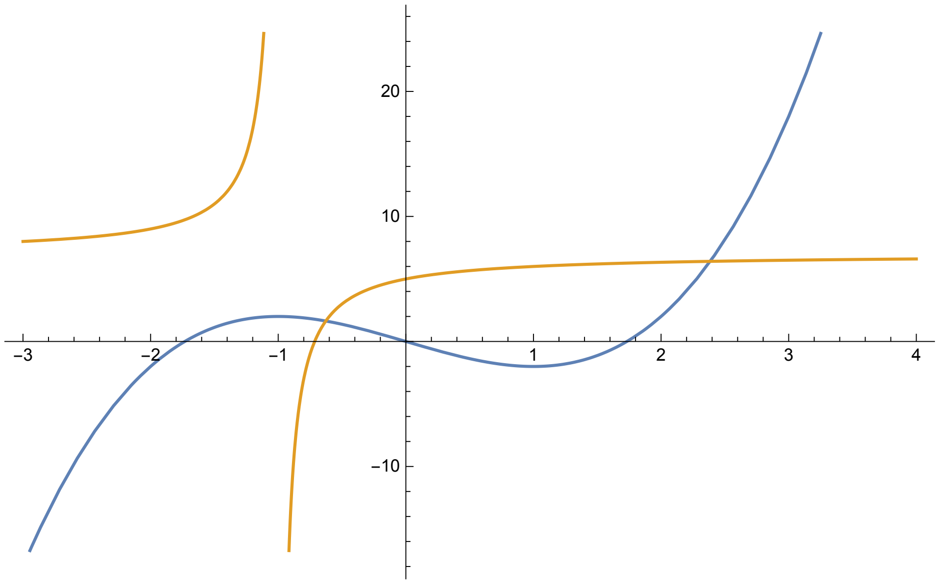

```
Reduce[x³ - 3 x == (7 x + 5)/(x + 1), x, Reals]
```
réduis — nombres

x == Root[-5 - 10 #1 - 3 #1^2 + #1^3 + #1^4 &, 1] || x == Root[-5 - 10 #1 - 3 #1^2 + #1^3 + #1^4 &, 2]

```
N[Reduce[x³ - 3 x == (7 x + 5)/(x + 1), x, Reals]]
```
réduis — nombres ré

x == -0.62722 || x == 2.38484

```
Plot[{x^3 - 3 x, (7 x + 5)/(x + 1)}, {x, -3, 4}, ImageSize → {500, 300}]
```
tracé de courbes · taille d'image



Corrigé de l'exercice 2-10

```
t = Table[Sign[Cos[k 2π/17]], {k, 0, 30}]
```
table · signe · cosinus

{1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1,
 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 1}

```
p = Position[t, -1]
```
position

{{6}, {7}, {8}, {9}, {10}, {11}, {12},
 {13}, {23}, {24}, {25}, {26}, {27}, {28}, {29}, {30}}

```
p = First[Position[t, -1]]
```
premier · position

{6}

```
p = First[Position[t, -1]][[1]]
```
premier · position

6

p est le rang. Pour le premier terme de la suite, $p = 1$ mais $k = 0$. Plus généralement,

```
k = p - 1
```

5

L'expression cherchée est

```
Cos[k 2π/17]
```
cosinus

$-\mathrm{Sin}\left[\frac{3\pi}{34}\right]$

dont la valeur est

```
N[Cos[k 2π/17]]
```

cosinus

```
-0.273663
```

Exercice 2 - 11

```
n = 100;
x = RandomInteger[{1, 6}, n]
```

entier aléatoire

```
{3, 3, 3, 1, 3, 1, 5, 6, 4, 3, 5, 4, 6, 6, 6, 3, 6, 5, 4, 5, 5, 2, 6,
 6, 6, 6, 6, 6, 3, 3, 4, 1, 6, 5, 1, 2, 1, 5, 3, 2, 4, 1, 4, 2, 2, 6, 3, 1,
 6, 1, 1, 6, 2, 6, 3, 4, 1, 6, 3, 1, 6, 3, 4, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 3, 6, 3, 4, 2,
 2, 6, 5, 5, 2, 5, 3, 1, 1, 2, 1, 6, 2, 4, 6, 2, 5, 5, 5, 6, 4, 3, 2, 1, 4, 2}
```

```
Count[x, 1]
```

compte

```
17
```

```
Count[x, 2]
```

compte

```
15
```

```
effectifs = Table[Count[x, j], {j, 1, 6}]
```

table compte

```
{17, 15, 17, 13, 15, 23}
```

$$\text{frequences} = \frac{\text{effectifs}}{n}$$

$$\left\{\frac{17}{100}, \frac{3}{20}, \frac{17}{100}, \frac{13}{100}, \frac{3}{20}, \frac{23}{100}\right\}$$

Exercice 2 - 12

Il s'agit de résoudre une liste d'équations:

```
Clear[x, m];
```

efface

```
Table[Reduce[(m^2 + 1) x^2 - 4 m x + 1 == 0 , x, Reals], {m, -6, 6}]
```

table réduis nombres réels

$$\left\{x == \frac{1}{37}\left(-12-\sqrt{107}\right) \,||\, x == \frac{1}{37}\left(-12+\sqrt{107}\right),\ x == \frac{1}{26}\left(-10-\sqrt{74}\right) \,||\, x == \frac{1}{26}\left(-10+\sqrt{74}\right),\right.$$
$$x == \frac{1}{17}\left(-8-\sqrt{47}\right) \,||\, x == \frac{1}{17}\left(-8+\sqrt{47}\right),\ x == \frac{1}{10}\left(-6-\sqrt{26}\right) \,||\, x == \frac{1}{10}\left(-6+\sqrt{26}\right),$$
$$x == \frac{1}{5}\left(-4-\sqrt{11}\right) \,||\, x == \frac{1}{5}\left(-4+\sqrt{11}\right),\ x == \frac{1}{2}\left(-2-\sqrt{2}\right) \,||\, x == \frac{1}{2}\left(-2+\sqrt{2}\right),$$
$$\text{False},\ x == \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2}\right) \,||\, x == \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right),\ x == \frac{1}{5}\left(4-\sqrt{11}\right) \,||\, x == \frac{1}{5}\left(4+\sqrt{11}\right),$$
$$x == \frac{1}{10}\left(6-\sqrt{26}\right) \,||\, x == \frac{1}{10}\left(6+\sqrt{26}\right),\ x == \frac{1}{17}\left(8-\sqrt{47}\right) \,||\, x == \frac{1}{17}\left(8+\sqrt{47}\right),$$
$$\left.x == \frac{1}{26}\left(10-\sqrt{74}\right) \,||\, x == \frac{1}{26}\left(10+\sqrt{74}\right),\ x == \frac{1}{37}\left(12-\sqrt{107}\right) \,||\, x == \frac{1}{37}\left(12+\sqrt{107}\right)\right\}$$

Passons aux valeurs numériques:

```
Table[N[Reduce[(m^2 + 1) x^2 - 4 m x + 1 == 0 , x, Reals]], {m, -6, 6}]
```

table ·· réduis nombres réels

```
{x == -0.603894 || x == -0.0447546, x == -0.715474 || x == -0.0537567,
 x == -0.873862 || x == -0.0673144, x == -1.1099 || x == -0.090098,
 x == -1.46332 || x == -0.136675, x == -1.70711 || x == -0.292893,
 False, x == 0.292893 || x == 1.70711, x == 0.136675 || x == 1.46332,
 x == 0.090098 || x == 1.1099, x == 0.0673144 || x == 0.873862,
 x == 0.0537567 || x == 0.715474, x == 0.0447546 || x == 0.603894}
```

Pour faciliter la lecture, écrivons la liste sous la forme d'un tableau:

```
TableForm[Table[N[Reduce[(m^2 + 1) x^2 - 4 m x + 1 == 0 , x, Reals]], {m, -6, 6}]]
```

forme de ta··· table ·· réduis nombres réels

```
x == -0.603894 || x == -0.0447546
x == -0.715474 || x == -0.0537567
x == -0.873862 || x == -0.0673144
x == -1.1099 || x == -0.090098
x == -1.46332 || x == -0.136675
x == -1.70711 || x == -0.292893
False
x == 0.292893 || x == 1.70711
x == 0.136675 || x == 1.46332
x == 0.090098 || x == 1.1099
x == 0.0673144 || x == 0.873862
x == 0.0537567 || x == 0.715474
x == 0.0447546 || x == 0.603894
```

Exercice 2 - S 1 (facultatif)

```
ContourPlot[{
  2 x + 3 y - 5 == 0,
  3 x - 2 y + 7 == 0,
  x^2 + 2 x - 3 - y == 0},
 {x, -5, 3}, {y, -4, 10}, Axes → True]
```

tracé de champ scalaire par ses contours · axes · vrai