Marcel Délèze
Edition 2017

Thème : § 3 Résolution d’équations avec Mathematica
Lien vers les énoncés des exercices:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/equations/3-Equations.pdf

Corrigé de l'exercice 3 - P 1

Comme il s'agit d'un calcul littéral, choisissons la méthode **Reduce[...]**

```
Clear[A, r, h];
```
efface

$$es = \text{Reduce}\left[A == \pi\, r \left(r + \sqrt{h^2 + r^2}\right), r, \text{Reals}\right]$$
réduis, nombres

$$\left(A < 0 \,\&\&\, \left(\left(h < -\sqrt{-A}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \,\&\&\, r == -\frac{\sqrt{\frac{A^2}{2A + h^2\pi}}}{\sqrt{\pi}}\right) \,||\, \left(h > \sqrt{-A}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \,\&\&\, r == -\frac{\sqrt{\frac{A^2}{2A + h^2\pi}}}{\sqrt{\pi}}\right)\right)\right) \,||$$

$$(A == 0 \,\&\&\, ((h < 0 \,\&\&\, r == 0) \,||\, (h == 0 \,\&\&\, r \le 0) \,||\, (h > 0 \,\&\&\, r == 0))) \,||\, \left(A > 0 \,\&\&\, r == \frac{\sqrt{\frac{A^2}{2A + h^2\pi}}}{\sqrt{\pi}}\right)$$

Pour obtenir une réponse plus simple, on peut préciser que les paramètres et inconnues sont des nombres positifs:

```
Clear[A, r, h];
```
efface

$$\text{Reduce}\left[A == \pi\, r \left(r + \sqrt{h^2 + r^2}\right) \land A > 0 \land h > 0 \land r > 0, r, \text{Reals}\right]$$
réduis, nombres

$$h > 0 \,\&\&\, A > 0 \,\&\&\, r == \frac{\sqrt{\frac{A^2}{2A + h^2\pi}}}{\sqrt{\pi}}$$

Simplifions encore la réponse obtenue, toujours sous l'hypothèse que les paramètres sont positifs:

$$r == \text{Simplify}\left[\frac{\sqrt{\frac{A^2}{2A + h^2\pi}}}{\sqrt{\pi}}, A > 0 \land h > 0\right]$$
simplifie

$$r == \frac{A}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{2A + h^2\pi}}$$

Corrigé de l'exercice 3 - P 2

```
A = 975;  p = 20; Clear[q];
                  efface
```

$$\text{Reduce}\left[A == \frac{1}{2}(p+q)\sqrt{p\,q} \wedge q \geq 0,\ q,\ \text{Reals}\right]$$

réduis nombres

$q == 45$

Calculons les côtés du triangle (valeurs exactes)

```
q = 45
```

45

```
a = p + q
```

65

$$b = \sqrt{p\,q + p^2}$$

$10\sqrt{13}$

$$c = \sqrt{p\,q + q^2}$$

$15\sqrt{13}$

Pour obtenir les valeurs numériques correspondantes, il suffit qu'un nombre soit donné avec un point décimal:

```
q = 45.
```

45.

```
a = p + q
```

65.

$$b = \sqrt{p\,q + p^2}$$

36.0555

$$c = \sqrt{p\,q + q^2}$$

54.0833

```
NumberForm[{a, b, c}, 16]
apparence numérique
```

{65., 36.05551275463989, 54.08326913195983}

Corrigé de l'exercice 3 - P 3

```
r = 0.3;  ρ1 = 900;  ρ0 = 1000; Clear[h];
                                 efface
```

$$\text{Reduce}\left[4\,r^3\,(\rho 0 - \rho 1) == h^2\,(3\,r - h)\,\rho 0,\ h,\ \text{Reals}\right]$$

réduis nombres

$h == -0.10373 \,||\, h == 0.11748 \,||\, h == 0.88625$

La solution *h* doit vérifier la condition $0 \leq h \leq 2r$

```
r = 0.3; ρ1 = 900; ρ0 = 1000; Clear[h];
                              efface
es = Reduce[4 r^3 (ρ0 - ρ1) == h^2 (3 r - h) ρ0 ∧ 0 ≤ h ≤ 2 r, h, Reals]
     réduis                                                      nombres
```

h == 0.11748

```
NumberForm[es, 16]
apparence numérique
```

h == 0.117480063395455

Corrigé de l'exercice 3 - P 4 (Première version avec Reduce sans utiliser des listes)

Dans un premier temps, pour bien comprendre les calculs à faire, nous n'utilisons pas de liste. Une solution qui fait usage de listes sera présentée plus tard (voir troisième version ci-dessous).

```
r = 50
```

50

```
α0 = 0;
```

```
Clear[α];
efface
```

```
Reduce[(α - Sin[α])/(2 π) == 1/10, α, Reals]
réduis                               nombres
```

α == Root[{π + 5 Sin[#1] - 5 #1 &, 1.62675334523314654068}]

On peut considérer qu'une réponse exprimée avec Root est une valeur exacte dont on peut calculer une valeur numérique approchée avec N :

```
N[Reduce[(α - Sin[α])/(2 π) == 1/10, α, Reals]]
  réduis                               nombres ré
```

α == 1.62675

Il s'agit d'une équation dont la valeur numérique est la deuxième composante:

```
α1 = N[Reduce[(α - Sin[α])/(2 π) == 1/10, α, Reals]][[2]]
       réduis                               nombres réels
```

1.62675

```
α2 = N[Reduce[(α - Sin[α])/(2 π) == 2/10, α, Reals]][[2]]
       réduis                               nombres réels
```

2.11314

```
α3 = N[Reduce[(α - Sin[α])/(2 π) == 3/10, α, Reals]][[2]]
       réduis                               nombres réels
```

2.49078

$$\alpha 4 = N\left[\text{Reduce}\left[\frac{\alpha - \text{Sin}[\alpha]}{2\pi} == \frac{4}{10}, \alpha, \text{Reals}\right]\right][[2]]$$
⌊·· ⌊réduis ⌊nombres réels

2.8248

$\alpha 5 = \pi$

π

$$\alpha 6 = N\left[\text{Reduce}\left[\frac{\alpha - \text{Sin}[\alpha]}{2\pi} == \frac{6}{10}, \alpha, \text{Reals}\right]\right][[2]]$$
⌊·· ⌊réduis ⌊nombres réels

3.45839

$$\alpha 7 = N\left[\text{Reduce}\left[\frac{\alpha - \text{Sin}[\alpha]}{2\pi} == \frac{7}{10}, \alpha, \text{Reals}\right]\right][[2]]$$
⌊·· ⌊réduis ⌊nombres réels

3.7924

$$\alpha 8 = N\left[\text{Reduce}\left[\frac{\alpha - \text{Sin}[\alpha]}{2\pi} == \frac{8}{10}, \alpha, \text{Reals}\right]\right][[2]]$$
⌊·· ⌊réduis ⌊nombres réels

4.17005

$$\alpha 9 = N\left[\text{Reduce}\left[\frac{\alpha - \text{Sin}[\alpha]}{2\pi} == \frac{9}{10}, \alpha, \text{Reals}\right]\right][[2]]$$
⌊·· ⌊réduis ⌊nombres réels

4.65643

$\alpha 10 = 2\pi$

2π

$$h0 = r\left(1 - \text{Cos}\left[\frac{\alpha 0}{2}\right]\right)$$
⌊cosinus

0

$$h1 = r\left(1 - \text{Cos}\left[\frac{\alpha 1}{2}\right]\right)$$
⌊cosinus

15.6476

$$h2 = r\left(1 - \text{Cos}\left[\frac{\alpha 2}{2}\right]\right)$$
⌊cosinus

25.4069

$$h3 = r\left(1 - \text{Cos}\left[\frac{\alpha 3}{2}\right]\right)$$
⌊cosinus

34.0154

$$h4 = r\left(1 - \underset{\text{cosinus}}{\text{Cos}}\left[\frac{\alpha 4}{2}\right]\right)$$

42.1132

$$h5 = r\left(1 - \underset{\text{cosinus}}{\text{Cos}}\left[\frac{\alpha 5}{2}\right]\right)$$

50

$$h6 = r\left(1 - \underset{\text{cosinus}}{\text{Cos}}\left[\frac{\alpha 6}{2}\right]\right)$$

57.8868

$$h7 = r\left(1 - \underset{\text{cosinus}}{\text{Cos}}\left[\frac{\alpha 7}{2}\right]\right)$$

65.9846

$$h8 = r\left(1 - \underset{\text{cosinus}}{\text{Cos}}\left[\frac{\alpha 8}{2}\right]\right)$$

74.5931

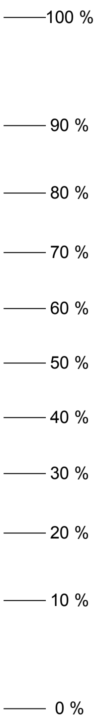
$$h9 = r\left(1 - \underset{\text{cosinus}}{\text{Cos}}\left[\frac{\alpha 9}{2}\right]\right)$$

84.3524

$$h10 = r\left(1 - \underset{\text{cosinus}}{\text{Cos}}\left[\frac{\alpha 10}{2}\right]\right)$$

100

```
Graphics[{Line[{{0, h0}, {5, h0}}], Line[{{0, h1}, {5, h1}}], Line[{{0, h2}, {5, h2}}],
   Line[{{0, h3}, {5, h3}}], Line[{{0, h4}, {5, h4}}], Line[{{0, h5}, {5, h5}}],
   Line[{{0, h6}, {5, h6}}], Line[{{0, h7}, {5, h7}}], Line[{{0, h8}, {5, h8}}],
   Line[{{0, h9}, {5, h9}}], Line[{{0, h10}, {5, h10}}], Text["  0 %", {5, h0}, {-1, 0}],
   Text[" 10 %", {5, h1}, {-1, 0}], Text[" 20 %", {5, h2}, {-1, 0}],
   Text[" 30 %", {5, h3}, {-1, 0}], Text[" 40 %", {5, h4}, {-1, 0}],
   Text[" 50 %", {5, h5}, {-1, 0}], Text[" 60 %", {5, h6}, {-1, 0}],
   Text[" 70 %", {5, h7}, {-1, 0}], Text[" 80 %", {5, h8}, {-1, 0}],
   Text[" 90 %", {5, h9}, {-1, 0}], Text["100 %", {5, h10}, {-1, 0}]},
 PlotRange → {{0, 20}, {-10, 110}}, AspectRatio → 5]
```



Corrigé de l'exercice 3 - P 4 (Deuxième version avec FindRoot sans utiliser des listes)

Pour bien comprendre les calculs à faire, nous n'utilisons pas de liste.
Une solution qui fait usage de listes sera présentée plus tard (voir troisième version ci-dessous).

```
r = 50
```

50

```
α0 = 0;
```

Utilisons une méthode numérique de type point fixe.
Une valeur de démarrage est 0.1*2*π

```
α0 = {α → 0}
```

{α → 0}

$$\alpha 1 = \text{FindRoot}\left[\frac{\alpha - \text{Sin}[\alpha]}{2\,\pi} == 0.1,\ \{\alpha,\ 0.1 * 2 * \pi\}\right]$$

trouve racine

{α → 1.62675}

$$\alpha 2 = \text{FindRoot}\left[\frac{\alpha - \text{Sin}[\alpha]}{2\,\pi} == 0.2,\ \{\alpha,\ 0.2 * 2 * \pi\}\right]$$

trouve racine

{α → 2.11314}

$$\alpha 3 = \text{FindRoot}\left[\frac{\alpha - \text{Sin}[\alpha]}{2\,\pi} == 0.3,\ \{\alpha,\ 0.3 * 2 * \pi\}\right]$$

trouve racine

{α → 2.49078}

$$\alpha 4 = \text{FindRoot}\left[\frac{\alpha - \text{Sin}[\alpha]}{2\,\pi} == 0.4,\ \{\alpha,\ 0.4 * 2 * \pi\}\right]$$

trouve racine

{α → 2.8248}

```
α5 = {α → N[π]}
```

valeur n

{α → 3.14159}

$$\alpha 6 = \text{FindRoot}\left[\frac{\alpha - \text{Sin}[\alpha]}{2\,\pi} == 0.6,\ \{\alpha,\ 0.6 * 2 * \pi\}\right]$$

trouve racine

{α → 3.45839}

$$\alpha 7 = \text{FindRoot}\left[\frac{\alpha - \text{Sin}[\alpha]}{2\,\pi} == 0.7,\ \{\alpha,\ 0.7 * 2 * \pi\}\right]$$

trouve racine

{α → 3.7924}

$$\alpha 8 = \text{FindRoot}\left[\frac{\alpha - \text{Sin}[\alpha]}{2\,\pi} == 0.8,\ \{\alpha,\ 0.8 * 2 * \pi\}\right]$$

trouve racine

{α → 4.17005}

```
α9 = FindRoot[(α - Sin[α])/(2 π) == 0.9, {α, 0.9 * 2 * π}]
     trouve racine

{α → 4.65643}

α10 = {α → 2. π}

{α → 6.28319}

h0 = r (1 - Cos[α/2]) /. α0
            cosinus

0

h1 = r (1 - Cos[α/2]) /. α1
            cosinus

15.6476

h2 = r (1 - Cos[α/2]) /. α2
            cosinus

25.4069

h3 = r (1 - Cos[α/2]) /. α3
            cosinus

34.0154

h4 = r (1 - Cos[α/2]) /. α4
            cosinus

42.1132

h5 = r (1 - Cos[α/2]) /. α5
            cosinus

50.

h6 = r (1 - Cos[α/2]) /. α6
            cosinus

57.8868

h7 = r (1 - Cos[α/2]) /. α7
            cosinus

65.9846

h8 = r (1 - Cos[α/2]) /. α8
            cosinus

74.5931
```

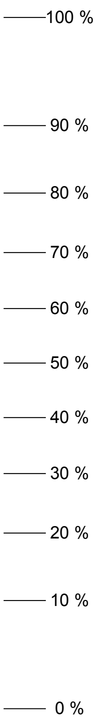
$$\mathbf{h9 = r\left(1 - \underset{\text{cosinus}}{\mathrm{Cos}}\left[\frac{\alpha}{2}\right]\right)\ /.\ \alpha 9}$$

84.3524

$$\mathbf{h10 = r\left(1 - \underset{\text{cosinus}}{\mathrm{Cos}}\left[\frac{\alpha}{2}\right]\right)\ /.\ \alpha 10}$$

100.

```
Graphics[{Line[{{0, h0}, {5, h0}}], Line[{{0, h1}, {5, h1}}], Line[{{0, h2}, {5, h2}}],
  Line[{{0, h3}, {5, h3}}], Line[{{0, h4}, {5, h4}}], Line[{{0, h5}, {5, h5}}],
  Line[{{0, h6}, {5, h6}}], Line[{{0, h7}, {5, h7}}], Line[{{0, h8}, {5, h8}}],
  Line[{{0, h9}, {5, h9}}], Line[{{0, h10}, {5, h10}}], Text["  0 %", {5, h0}, {-1, 0}],
  Text[" 10 %", {5, h1}, {-1, 0}], Text[" 20 %", {5, h2}, {-1, 0}],
  Text[" 30 %", {5, h3}, {-1, 0}], Text[" 40 %", {5, h4}, {-1, 0}],
  Text[" 50 %", {5, h5}, {-1, 0}], Text[" 60 %", {5, h6}, {-1, 0}],
  Text[" 70 %", {5, h7}, {-1, 0}], Text[" 80 %", {5, h8}, {-1, 0}],
  Text[" 90 %", {5, h9}, {-1, 0}], Text["100 %", {5, h10}, {-1, 0}]},
 PlotRange → {{0, 20}, {-10, 110}}, AspectRatio → 5]
```



Corrigé de l'exercice 3 - P 4 (Troisième version avec des listes)

La solution de l'exercice peut être considérablement raccourci en faisant usage de listes. C'est la variante qui est présentée ici.

```
r = 50; t = 1/10;
```

$$\mathbf{Reduce}\left[\frac{\alpha - \mathrm{Sin}[\alpha]}{2\pi} == t,\ \alpha,\ \mathrm{Reals}\right]$$
réduis nombres

$\alpha == \mathrm{Root}[\{\pi + 5\,\mathrm{Sin}[\#1] - 5\,\#1\ \&,\ 1.62675334523314654068\}]$

Utilisons une méthode numérique de type point fixe.
Une valeur de démarrage est t*2*π

$$\mathbf{FindRoot}\left[\frac{\alpha - \mathrm{Sin}[\alpha]}{2\pi} == t,\ \{\alpha,\ t*2*\pi\}\right]$$
trouve racine

$\{\alpha \to 1.62675\}$

Il s'agit de résoudre une liste d'équations:

$$\mathrm{FindRoot}\left[\frac{\alpha - \mathrm{Sin}[\alpha]}{2\pi} == 0,\ \{\alpha,\ 0*2*\pi\}\right],$$
$$\mathrm{FindRoot}\left[\frac{\alpha - \mathrm{Sin}[\alpha]}{2\pi} == 0.1,\ \{\alpha,\ 0.1*2*\pi\}\right],$$
$$\ldots,\ \mathrm{FindRoot}\left[\frac{\alpha - \mathrm{Sin}[\alpha]}{2\pi} == 1,\ \{\alpha,\ 1*2*\pi\}\right]$$

```
Clear[t];
```
efface

$$es = \mathrm{Table}\left[\mathrm{FindRoot}\left[\frac{\alpha - \mathrm{Sin}[\alpha]}{2\pi} == t,\ \{\alpha,\ t*2*\pi\}\right],\ \left\{t,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{10}\right\}\right]$$
table trouve racine

$\{\{\alpha \to 0.\},\ \{\alpha \to 1.62675\},\ \{\alpha \to 2.11314\},\ \{\alpha \to 2.49078\},\ \{\alpha \to 2.8248\},\ \{\alpha \to 3.14159\},\ \{\alpha \to 3.45839\},\ \{\alpha \to 3.7924\},\ \{\alpha \to 4.17005\},\ \{\alpha \to 4.65643\},\ \{\alpha \to 6.28319\}\}$

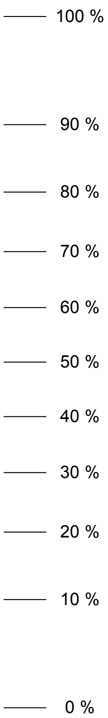
$$h = r\left(1 - \mathrm{Cos}\left[\frac{\alpha}{2}\right]\right)\ /.\ es$$
cosinus

{0., 15.6476, 25.4069, 34.0154, 42.1132, 50., 57.8868, 65.9846, 74.5931, 84.3524, 100.}

La liste h est indicée à partir de 1; donc

$$h_0 = h[[1]],\ \ldots,\ h_{10} = h[[11]]$$

```
Graphics[{Table[{Line[{{0, h[[i]]}, {5, h[[i]]}}],
graphique   table   ligne
    Text[ToString[PaddedForm[10 (i - 1), 4]] <> " %", {5, h[[i]]}, {-1, 0}]}, {i, 11}]},
    texte  convertis ··· forme de remplissage
 PlotRange → {{0, 20}, {-10, 110}}, AspectRatio → 5]
 zone de tracé                       rapport d'aspect
```



Corrigé de l'exercice 3 - P 5

```
Clear[r, i];
efface
c = 8200;  a = 2000; n = 6;
```

$$N\left[\text{Reduce}\left[c\, r^n - a \frac{r^n - 1}{r - 1} == 0,\ r,\ \text{Reals}\right]\right]$$

`·· réduis        nombres ré`

Le taux étant notoirement positif, seules les solutions qui sont plus grandes que 1 nous intéressent:

$$es = N\left[\text{Reduce}\left[c\, r^n - a \frac{r^n - 1}{r - 1} == 0 \land r > 1,\ r,\ \text{Reals}\right]\right]$$

`·· réduis        nombres ré`

```
r == 1.12098
```

$$i = r - 1 = 0.12098 = 12.098 \times \%$$

Pour une valeur plus précise du taux

```
NumberForm[es[[2]] - 1, 16]
apparence numérique
0.1209818292515901
```