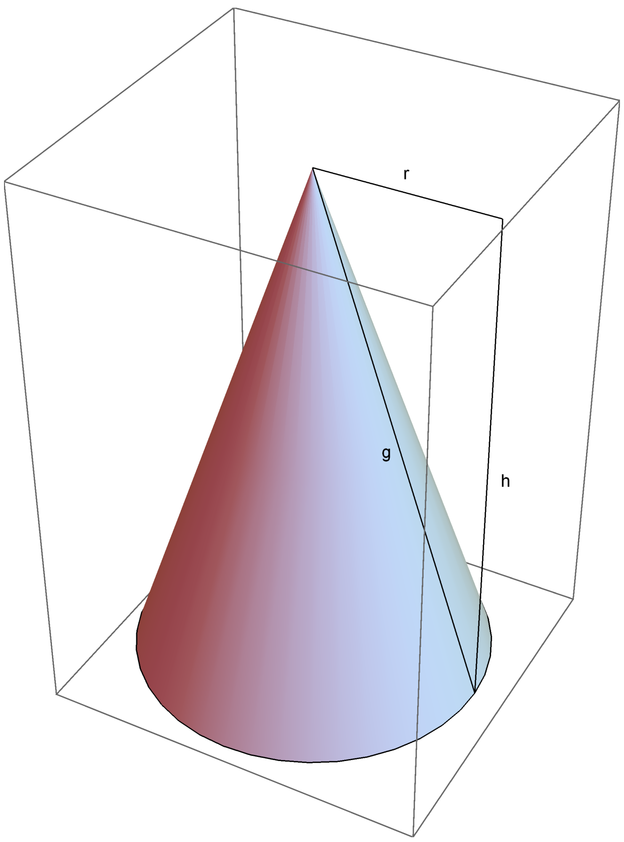
Marcel Délèze
Edition 2017

Thème : § 1 Mise en équations

Lien vers les énoncés des exercices:

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/equations/1-Equations.pdf

Corrigé de l'exercice 1- P 1



D'après le formulaire, on a

$$A = \pi\, r\, (r + g) \qquad \text{où} \qquad g^2 = h^2 + r^2$$

Le système à résoudre, d'inconnue *r*, est

$$\boxed{\begin{array}{l} A = \pi\, r \left(r + \sqrt{h^2 + r^2}\right) \\ \quad r > 0 \end{array}}$$

où $A > 0$ et $h > 0$ sont donnés.

Catégorie

Après transformation et élévation au carré, l'équation devient polynomiale du 2-ème degré en *r* (voir ci-dessous).

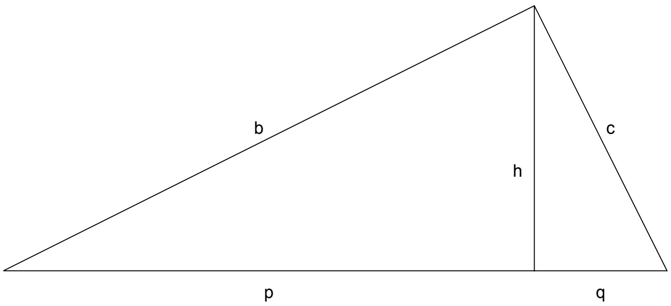
Elle est dans la catégorie I.

Résolution du système

Printed by Wolfram Mathematica Student Edition

$$A - \pi r^2 = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$$
$$A^2 - 2 A \pi r^2 + \pi^2 r^4 = \pi^2 r^2 h^2 + \pi^2 r^4 \quad \text{et} \quad A - \pi r^2 \geq 0$$
$$A^2 = \pi r^2 \left(\pi h^2 + 2 A\right) \quad \text{et} \quad \pi r^2 \leq A$$
$$r^2 = \frac{A^2}{\pi (\pi h^2 + 2 A)} \quad \text{et} \quad r^2 \leq \frac{A}{\pi}$$
$$r = \frac{A}{\sqrt{\pi (\pi h^2 + 2 A)}}$$

Corrigé de l'exercice 1- P 2



Notations:

a : hypoténuse

b, c : cathètes

p, q : projections des cathètes sur l'hypoténuse

h : hauteur issue de l'angle droit

A : aire du triangle

Relations (voir formulaire) :

$$a = p + q$$
$$A = \frac{1}{2} a h$$
$$h^2 = p q \qquad \text{(théorème de la hauteur)}$$
$$b = \sqrt{h^2 + p^2} = \sqrt{p q + p^2}$$
$$c = \sqrt{h^2 + q^2} = \sqrt{p q + q^2}$$

Le système à résoudre, d'inconnues *q, a, b, c*, est

$$\boxed{\begin{array}{lll} A = \frac{1}{2} (p + q) \sqrt{p q}\,, & & q > 0, \\ a = p + q, & b = \sqrt{p q + p^2}\,, & c = \sqrt{p q + q^2} \end{array}}$$

où $A > 0$ et $p > 0$ sont donnés.

Catégorie

$$A^2 = \frac{1}{4} \left(p^2 + 2 p q + q^2\right) p q$$

est une équation du 3-ème degré en *q*. Il s'agit donc d'une équation de la catégorie II.

Résolution

On résout d'abord l'équation

$$A = \frac{1}{2}\,(p + q)\,\sqrt{p\,q} \qquad \text{où} \quad q > 0$$

par une méthode numérique et on obtient une valeur numérique approchée de *q*.
Après quoi le calcul de *a, b, c* est immédiat.

Corrigé de l'exercice 1- P 3

Rappelons les notations utilisées ici:

V =volume de la boule;
ρ_1 =masse volumique de la boule;
V_{im} =volume de la partie immergée;
$V_é$ =volume de la partie émergente;
ρ_0 =masse volumique du liquide.

Partons de la relation d'équilibre

masse de la boule = masse du liquide déplacé

$$\boxed{\rho_1\,V = \rho_0\,V_{im}}$$

$$\rho_1\,V = \rho_0\,(V - V_é)$$

$$\rho_1\,V = \rho_0\,V - \rho_0\,V_é$$

$$\rho_0\,V_é = \rho_0\,V - \rho_1\,V$$

$$\rho_0\,V_é = (\rho_0 - \rho_1)\,V$$

Voir *Formulaires et tables*, p. 44

$$\rho_0\,\frac{\pi}{3}\,h^2\,(3\,r - h) = (\rho_0 - \rho_1)\,\frac{4}{3}\,\pi\,r^3$$

$$\rho_0\,h^2\,(3\,r - h) = (\rho_0 - \rho_1)\,4\,r^3$$

Le système à résoudre, d'inconnue *h*, est

$$\boxed{\begin{array}{c} 4\,r^3\,(\rho_0 - \rho_1) = h^2\,(3\,r - h)\,\rho_0 \\ 0 < h < 2\,r \end{array}}$$

où $r > 0$ et $0 < \rho_1 < \rho_0$ sont donnés.

Catégorie

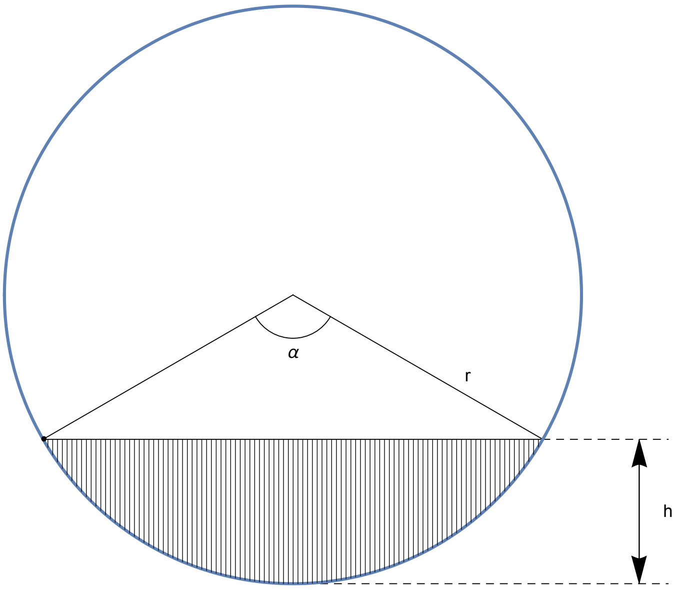
L'équation est du 3-ème degré en *h*.
C'est une équation de la catégorie II.

Résolution

Pour des valeurs numériques données r, ρ_0, ρ_1, on peut résoudre l'équation par une méthode numérique.

Corrigé de l'exercice 1- P 4

$$V = (\text{aire du segment circulaire}) \cdot L$$



Pour exprimer l'aire du segment circulaire, des deux formules qui sont données dans le formulaire, choisissons celle qui contient le moins de variables:

$$V = \frac{1}{2} r^2 (\alpha - \sin(\alpha)) L$$

Divisons les deux membres par la capacité $C = \pi r^2 L$ et substituons $\frac{V}{C} = t$ qui représente le taux de remplissage :

$$t = \frac{\alpha - \sin(\alpha)}{2\pi}$$

Le système à résoudre, d'inconnues *α* et *h*, est

$$\boxed{\begin{array}{ll} t = \dfrac{\alpha - \sin(\alpha)}{2\pi} & \text{où } \alpha \in [0,\ 2\pi] \\ h = r\left(1 - \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right) & \end{array}}$$

où $r > 0$ et $t \in [0;\ 1]$ sont donnés.

Catégorie

Il s'agit d'une équation de la catégorie III.

Résolution

Pour *r* et *t* donnés, on peut résoudre la première équation par une méthode numérique.
α ayant été déterminé, le calcul de *h* est immédiat.

Corrigé de l'exercice 1 - P 5

Relation :

$$\begin{pmatrix}\text{valeur acquise par la dette}\\ \text{après n années}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{valeur acquise par les annuités}\\ \text{après n années}\end{pmatrix}$$

Valeur acquise par la dette à la fin de la n – ème année :

an	**dette**
0	c
1	$c + c\, i = c\,(1+i) = c\, r$
2	$(c\, r) + (c\, r)\, i = c\, r\,(1+i) = c\, r\, r = c\, r^2$
3	$(c\, r^2) + (c\, r^2)\, i = c\, r^2\,(1+i) = c\, r^2\, r = c\, r^3$
	...
n	$\boxed{c\, r^n}$

La valeur acquise par les annuités à la fin de la n – ème année est égale
aux annuités des années précédentes augmentées de leurs intérêts
+ annuité versée à la fin de l'année en cours

an	**annuités**
1	a
2	$(a)\, r + a = a\, r + a$
3	$(a\, r + a)\, r + a = a\, r^2 + a\, r + a$
4	$(a\, r^2 + a\, r + a)\, r + a = a\, r^3 + a\, r^2 + a\, r + a$
	...
n	$a\, r^{n-1} + ... + a\, r^2 + a\, r + a = a\,(r^{n-1} + ... + r^2 + r + 1) = \boxed{a\,\frac{r^n - 1}{r - 1}}$

Le contrat est équitable si les valeurs acquises par la dette et les annuités sont égales :

$$c\, r^n = a\,\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Le système à résoudre, d'inconnues *r* et *i*, est

$$\boxed{\begin{array}{c} c\, r^n - a\,\dfrac{r^n - 1}{r - 1} = 0 \\ r > 1 \\ i = r - 1 \end{array}}$$

où c et a sont donnés ($c > 0$ et $a > 0$).

Catégorie

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré n en r.
Pour n ≥5, l'équation est de catégorie III.

Résolution

Pour c et a donnés, on résout la première équation par une méthode numérique et on trouve r.
On calcule ensuite $i = r - 1$.