Marcel Délèze
Edition 2017

Thème : Equations différentielles, § 4 Equations différentielles linéaires du premier ordre
Lien vers les énoncés des travaux dirigés:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/eq-differentielles/1-4_EQ-DIFFERENTIELLES.pdf

Corrigés des travaux dirigés

§ 1.4 TD 1

a) Résolution de l'équation différentielle

L'équation différentielle du premier ordre

$$\dot{\Theta} = -k\,\Theta + k\,\Theta_{as}$$

est linéaire à coefficients constants.

1-ère étape : on résout d'abord l'équation homogène associée

$$\dot{\Theta} = -k\,\Theta$$

$$\frac{\dot{\Theta}}{\Theta} = -k$$

$$\ln|\Theta| = -k\,t + c$$

$$|\Theta| = e^{-k\,t+c} = e^{c}\,e^{-k\,t}$$

$$\Theta_{hom}(t) = a\,e^{-k\,t} \qquad \text{où} \quad a \quad \text{est une constante réelle}$$

2-ème étape : on détermine une solution particulière (quelconque) de l'équation inhomogène; ici, l'équation donnée possède une solution constante. Dans ce cas, la dérivée est nulle et

$$0 = -k\,\Theta + k\,\Theta_{as} \quad \Longrightarrow \quad \Theta_{part}(t) = \Theta_{as}$$

La signification physique de cette solution est la suivante : si la température initiale du corps est égale à la température ambiante, alors la température du corps demeure constante.

3-ème étape : la solution générale de l'équation inhomogène est la somme des solutions homogène et particulière

$$\Theta(t) = \Theta_{hom}(t) + \Theta_{part}(t) = a\,e^{-k\,t} + \Theta_{as}$$
$$\text{où} \quad a \quad \text{est une constante réelle}$$

4-ème étape : la solution qui vérifie la condition initiale appartient à la solution générale

$$\Theta(0) = a\,e^{-k\,0} + \Theta_{as} = \Theta_0 \quad \Longrightarrow \quad a = \Theta_0 - \Theta_{as}$$

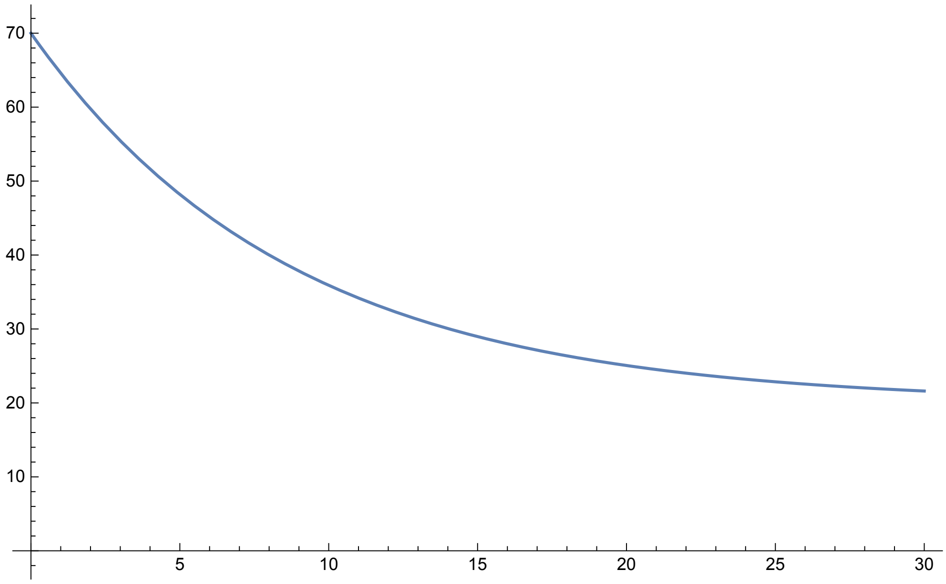
$$\boxed{\Theta(t) = (\Theta_0 - \Theta_{as})\,e^{-k\,t} + \Theta_{as}}$$

b)

$$\Theta(t) = (\Theta_0 - \Theta_{as})\,e^{-k\,t} + \Theta_{as}$$
$$\Theta_{as} = \Theta(\infty) = 20\,°C$$
$$\Theta_0 = \Theta(0) = 70\,°C$$
$$\Theta(t) = (50\,°C)\,e^{-k\,t} + 20\,°C$$

$$\Theta\,(8\,\text{min}) = 40\ °\text{C}$$
$$(50\ °\text{C})\ e^{-k\,(8\,\text{min})} + 20\ °\text{C} = 40\ °\text{C}$$
$$(50\ °\text{C})\ e^{-k\,(8\,\text{min})} = 20\ °\text{C}$$
$$e^{-k\,(8\,\text{min})} = \frac{2}{5}$$
$$-k\,(8\,\text{min}) = \ln\left(\frac{2}{5}\right)$$
$$k = -\frac{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}{8\,\text{min}} = \frac{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}{8\,\text{min}} \simeq 0.114536\,\text{min}^{-1}$$
$$\Theta\,(t) = (50\ °\text{C})\ e^{-0.114536\,\text{min}^{-1}\,t} + 20\ °\text{C}$$

Plot[50 e^(-0.114536` t) + 20, {t, 0, 30}, AxesOrigin → {0, 0}]
tracé de courbes origine des axes



Si $\Theta_0 \neq \Theta_{as}$, l'équation d'inconnue *t*

$$\Theta\,(t) = (\Theta_0 - \Theta_{as})\ e^{-k\,t} + \Theta_{as} = \Theta_{as} \iff (\Theta_0 - \Theta_{as})\ e^{-k\,t} = 0$$

n'a pas de solution. Par contre, si l'imprécision sur la température est d'un demi degré, on a

$$\Theta\,(t) = 20.5\ °\text{C}$$
$$(50\ °\text{C})\ e^{-0.114536\,\text{min}^{-1}\,t} = 0.5\ °\text{C}$$
$$e^{-0.114536\,\text{min}^{-1}\,t} = \frac{1}{100}$$
$$t = \frac{-1}{0.114536\ \text{min}^{-1}}\ \ln\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{\ln\,(100)}{0.114536}\,\text{min} \simeq 40.207\,\text{min}$$

c)

$$\Theta\,(t+T) - \Theta_{as} =$$
$$(\Theta_0 - \Theta_{as})\ e^{-k\,(t+T)} = e^{-k\,T}\ (\Theta_0 - \Theta_{as})\ e^{-k\,t} = e^{-k\,T}\ (\Theta\,(t) - \Theta_{as}) = \frac{1}{2}\ (\Theta\,(t) - \Theta_{as})$$
$$\iff e^{-k\,T} = \frac{1}{2} \iff -k\,T = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\,(2) \iff \boxed{T = \frac{\ln\,(2)}{k}}$$

Durant chaque intervalle de temps de durée *T*, l'écart de température se réduit d'un facteur $\frac{1}{2}$.

d)

Le refroidissement est plus rapide lorsque l'écart de température est grand. Il vaut donc mieux verser la crème dans le café le plus tard possible.

§ 1.4 TD 2

a) Résolution de l'équation différentielle

L'équation différentielle du premier ordre

$$\dot{c}(t) = -\frac{D}{V} c(t) + \frac{D}{V} c_e$$

est linéaire à coefficients constants.

1-ère étape : on résout d'abord l'équation homogène associée

$$\dot{c}(t) = -\frac{D}{V} c(t)$$

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = -\frac{D}{V}$$

$$\ln|c(t)| = -\frac{D}{V} t + k \qquad \text{(où } k \text{ est une constante réelle)}$$

$$|c(t)| = e^{-\frac{D}{V} t + k} = e^k e^{-\frac{D}{V} t}$$

$$c(t) = \pm e^{-\frac{D}{V} t + k} = \pm e^k e^{-\frac{D}{V} t}$$

$$c_{hom}(t) = a\, e^{-\frac{D}{V} t} \qquad \text{où} \quad a = \pm e^k \text{ est une constante réelle.}$$

2-ème étape : on détermine une solution particulière (quelconque) de l'équation inhomogène; ici, l'équation donnée possède une solution constante. Dans ce cas, la dérivée est nulle et

$$0 = -\frac{D}{V} c_{part}(t) + \frac{D}{V} c_e \quad \Longrightarrow \quad c_{part}(t) = c_e$$

La signification physique de cette solution est la suivante : si la concentration initiale est égale à la concentration entrante, alors la concentration demeure constante.

3-ème étape : la solution générale de l'équation inhomogène est la somme des solutions homogène et particulière

$$c(t) = c_{hom}(t) + c_{part}(t) = a\, e^{-\frac{D}{V} t} + c_e$$

$$\text{où} \quad a \quad \text{est une constante réelle}$$

4-ème étape : la solution qui vérifie la condition initiale appartient à la solution générale

$$c(0) = a\, e^{-\frac{D}{V} 0} + c_e = c_0 \quad \Longrightarrow \quad a = c_0 - c_e$$

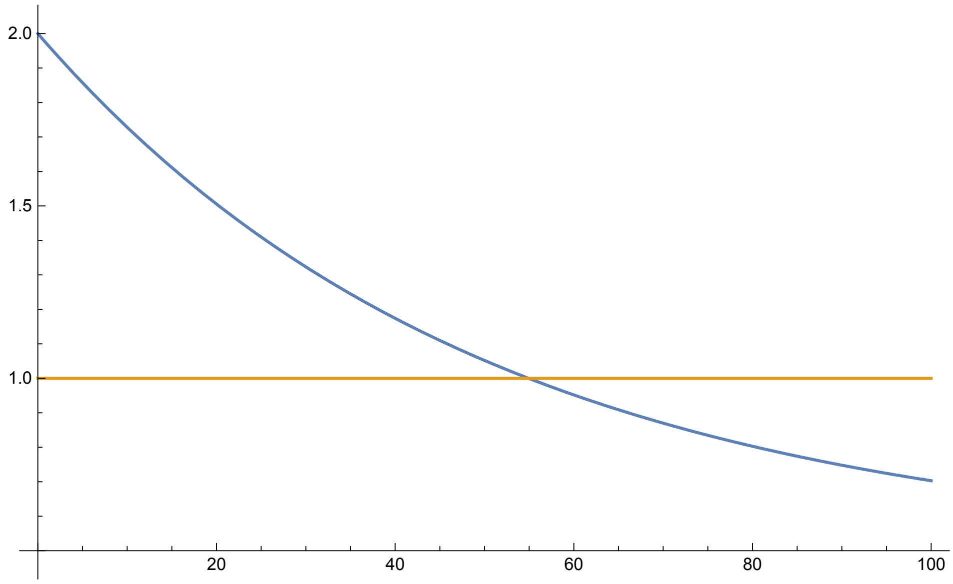
$$\boxed{c(t) = (c_0 - c_e)\, e^{-\frac{D}{V} t} + c_e}$$

b)

```
Clear[c, t];
effacé
```

$c[t\_] := (2 - 0.5`)\, e^{\frac{1}{200}(-4)\,t} + 0.5`;$

```
Plot[{c[t], 1}, {t, 0, 100}, AxesOrigin → {0, 0.5`}]
tracé de courbes                origine des axes
```




```
Solve[c[t] == 1, t]
résous
```

Solve: Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information.

{{t → 54.9306}}

Réponse: 54.93 secondes

§ 1.4 TD 3

Modèle

TD 2	*TD 3*
Cuve de volume V (constant)	Sang dans le corps du patient $V \approx 5$ litres
Concentration entrante c_e	$c_e = 1$ nouveau sang
Concentration initiale c_0	$c_0 = 0$ ancien sang
Concentration instantanée $c(t)$	$c(t) =$ proportion de nouveau sang

$$c(t) = (0 - 1)\, e^{-\frac{D}{V} t} + 1 = 1 - e^{-\frac{D}{V} t}$$

Durée de la transfusion

$$D\, t_f = 3\, V \quad \Longrightarrow \quad t_f = \frac{3\, V}{D}$$

Proportion de nouveau sang à la fin

$$c(t_f) = 1 - e^{-\frac{D}{V}\frac{3V}{D}} = 1 - e^{-3} = 0.950213$$

Proportion résiduelle de l'ancien sang:

$$1 - c(t_f) = e^{-3} = 0.0497871$$

soit environ 5 %.