Marcel Délèze
Edition 2017

Thème : Nombres complexes
Lien vers les énoncés des exercices:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/complexes/2-complexes.pdf

Package Tableaux

Le package **Tableaux** offre diverses procédures pour afficher des tableaux incluant les titres de lignes et de colonnes, le formatage des cellules et la possibilité de tourner le tableau d'un quart de tour.

Pour avoir accès au package, il suffit de connaître son adresse web:

```
Needs["Tableaux`",
 "https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/packages/Tableaux.m"]
```

Pour ne pas oublier d'exécuter ces instructions au début de chaque session de travail, il est conseillé de déclarer les instructions **Needs** comme étant des cellules d'initialisation. Pour ce faire, sélectionnez les cellules voulues puis passez par le menu

Cell / Cell properties / Initialization cell

Corrigé de l'exercice 2 - 1

Partie a) Posons

$$x = x_1 + i\,x_2 \quad \text{où} \quad x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$$
$$y = y_1 + i\,y_2 \quad \text{où} \quad y_1,\ y_2 \in \mathbb{R}$$
$$z = z_1 + i\,z_2 \quad \text{où} \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{R}$$

D'une part,

$$x\,(y+z) = (x_1 + i\,x_2)\,((y_1 + i\,y_2) + (z_1 + i\,z_2)) = (x_1 + i\,x_2)\,((y_1 + z_1) + i\,(y_2 + z_2)) =$$
$$(x_1\,(y_1 + z_1) - x_2\,(y_2 + z_2)) + i\,(x_1\,(y_2 + z_2) + x_2\,(y_1 + z_1)) =$$
$$(x_1\,y_1 + x_1\,z_1 - x_2\,y_2 - x_2\,z_2) + i\,(x_1\,y_2 + x_1\,z_2 + x_2\,y_1 + x_2\,z_1)$$

D'autre part,

$$x\,y + x\,z = (x_1 + i\,x_2)\,(y_1 + i\,y_2) + (x_1 + i\,x_2)\,(z_1 + i\,z_2) =$$
$$((x_1\,y_1 - x_2\,y_2) + i\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_1)) + ((x_1\,z_1 - x_2\,z_2) + i\,(x_1\,z_2 + x_2\,z_1)) =$$
$$(x_1\,y_1 - x_2\,y_2 + x_1\,z_1 - x_2\,z_2) + i\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_1 + x_1\,z_2 + x_2\,z_1)$$

On observe que les deux expressions sont égales quels que soient les nombres complexes *x*, *y* et *z*.

Partie b)

$$z_1\,z_2 = (a + i\,b)\,\frac{a - i\,b}{a^2 + b^2} = (a + i\,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{(-b)}{a^2+b^2}\right) =$$
$$\left(a\,\frac{a}{a^2+b^2} - b\,\frac{(-b)}{a^2+b^2}\right) + i\left(a\,\frac{(-b)}{a^2+b^2} + b\,\frac{a}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + i\,\frac{0}{a^2+b^2} = 1$$

Partie c) Posons

$$z = x + i\,y \quad \text{où} \quad x,\ y \in \mathbb{R}$$
$$z_1 = x_1 + i\,y_1 \quad \text{où} \quad x_1,\ y_1 \in \mathbb{R}$$

$$z_2 = x_2 + i\, y_2 \qquad \text{où} \qquad x_2\,,\; y_2 \in \mathbb{R}$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + i\, y_1) + (x_2 + i\, y_2) = (x_1 + x_2) + i\, (y_1 + y_2)$$

$$\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\,((x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)) = x_1 + x_2 = \mathrm{Re}\,(z_1) + \mathrm{Re}\,(z_2)$$

$$\mathrm{Im}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\,((x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)) = y_1 + y_2 = \mathrm{Im}\,(z_1) + \mathrm{Im}\,(z_2)$$

$$\rho\, z = \rho\,(x + i\, y) = (\rho\, x) + i\,(\rho\, y)$$

$$\mathrm{Re}\,(\rho\, z) = \mathrm{Re}\,((\rho\, x) + i\,(\rho\, y)) = \rho\, x = \rho\, \mathrm{Re}\,(z)$$

$$\mathrm{Im}\,(\rho\, z) = \mathrm{Im}\,((\rho\, x) + i\,(\rho\, y)) = \rho\, y = \rho\, \mathrm{Im}\,(z)$$

Corrigé de l'exercice 2 - 2

Posons

$$z_1 = x_1 + i\, y_1 \qquad \text{où} \qquad x_1,\; y_1 \in \mathbb{R}$$
$$z_2 = x_2 + i\, y_2 \qquad \text{où} \qquad x_2,\; y_2 \in \mathbb{R}$$

D'une part,

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1 + i\, y_1}{x_2 + i\, y_2}\right)} = \overline{\left(\frac{(x_1 + i\, y_1)\,(x_2 - i\, y_2)}{(x_2 + i\, y_2)\,(x_2 - i\, y_2)}\right)} =$$

$$\overline{\left(\frac{(x_1\, x_2 + y_1\, y_2) + i\,(y_1\, x_2 - x_1\, y_2)}{x_2^2 + y_2^2}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1\, x_2 + y_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\, \frac{y_1\, x_2 - x_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)} =$$

$$\frac{x_1\, x_2 + y_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\, \frac{y_1\, x_2 - x_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1\, x_2 + y_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\, \frac{x_1\, y_2 - y_1\, x_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

D'autre part,

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{x_1 - i\, y_1}{x_2 - i\, y_2} =$$

$$\frac{(x_1 - i\, y_1)\,(x_2 + i\, y_2)}{(x_2 - i\, y_2)\,(x_2 + i\, y_2)} = \frac{(x_1\, x_2 + y_1\, y_2) + i\,(x_1\, y_2 - y_1\, x_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1\, x_2 + y_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\, \frac{x_1\, y_2 - y_1\, x_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Les deux expressions sont égales quels que soient les nombres complexes z_1 et z_2.

Corrigé de l'exercice 2 - 3

$$\frac{1 + 2\, i}{1 - 2\, i} = \frac{(1 + 2\, i)\,(1 + 2\, i)}{(1 - 2\, i)\,(1 + 2\, i)} = \frac{(1 * 1 - 2 * 2) + i\,(1 * 2 + 2 * 1)}{1^2 + (-2)^2} = \frac{-3 + 4\, i}{5} = -\frac{3}{5} + i\, \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{(1 + 2\, i)\,(3 - i)} = \frac{1 - 2\, i}{(1 + 2\, i)\,(1 - 2\, i)}\; \frac{3 + i}{(3 - i)\,(3 + i)} =$$

$$\frac{(1 - 2\, i)\,(3 + i)}{5 * 10} = \frac{(1 * 3 + 2 * 1) + i\,(1 * 1 - 2 * 3)}{50} = \frac{5 - 5\, i}{50} = \frac{1}{10} - i\, \frac{1}{10}$$

$$\frac{-2}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{-2\,\left(1 + i\sqrt{3}\right)}{\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(1 + i\sqrt{3}\right)} = \frac{-2\,\left(1 + i\sqrt{3}\right)}{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}\, i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$$

Corrigé de l'exercice 2 - 4

Posons

$$z_1 = a_1 + i\, b_1 \qquad \text{où} \qquad a_1,\; b_1 \in \mathbb{R}$$
$$z_2 = a_2 + i\, b_2 \qquad \text{où} \qquad a_2,\; b_2 \in \mathbb{R}$$

On a

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i\, b_1}{a_2 + i\, b_2} = \frac{(a_1 + i\, b_1)\,(a_2 - i\, b_2)}{(a_2 + i\, b_2)\,(a_2 - i\, b_2)} = \frac{(a_1\, a_2 + b_1\, b_2) + i\,(b_1\, a_2 - a_1\, b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Corrigé de l'exercice 2 - 5

a) Appliquons la règle de l'*argument du produit* qui a été démontrée dans le cours :

$$\text{Arg}\,(\rho\, z) = \text{Arg}\,(\rho) + \text{Arg}\,(z) = 0 + \text{Arg}\,(z) = \text{Arg}\,(z)$$

b) Appliquons la règle du *module du produit* qui a été démontrée dans le cours :

$$1 = |1| = \left| z_2\, \frac{1}{z_2} \right| = |z_2| \left| \frac{1}{z_2} \right|$$

Il s'ensuit que les deux derniers modules sont inverses, c'est-à-dire

$$\left| \frac{1}{z_2} \right| = \frac{1}{|z_2|}$$

c) Appliquons la règle du produit et la règle b) ci-dessus

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| z_1\, \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \left| \frac{1}{z_2} \right| = |z_1|\, \frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

d) Appliquons la règle de l'*argument du produit* qui a été démontrée dans le cours :

$$0 \equiv \text{Arg}\,(1) \equiv \text{Arg}\left(z_2\, \frac{1}{z_2}\right) \equiv \text{Arg}\,(z_2) + \text{Arg}\left(\frac{1}{z_2}\right) \qquad (\text{mod } 2\pi)$$

Il s'ensuit que les deux derniers arguments sont opposés, c'est-à-dire

$$\text{Arg}\left(\frac{1}{z_2}\right) \equiv -\text{Arg}\,(z_2) \qquad (\text{mod } 2\pi)$$

e) Appliquons la règle du produit et la règle d) ci-dessus

$$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \text{Arg}\left(z_1\, \frac{1}{z_2}\right) \equiv \text{Arg}\,(z_1) + \text{Arg}\left(\frac{1}{z_2}\right) \equiv \text{Arg}\,(z_1) - \text{Arg}\,(z_2) \qquad (\text{mod } 2\pi)$$

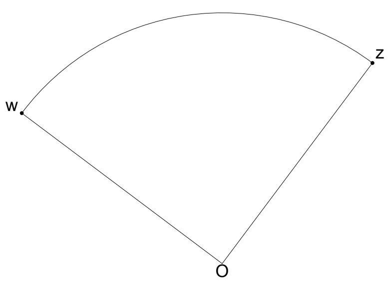
Corrigé de l'exercice 2 - 6

a) Module et argument

$$|w| = |z\, i| = |z|\;|i| = |z|\; 1 = |z|$$

$$\text{Arg}\,(w) = \text{Arg}\,(z\, i) = \text{Arg}\,(z) + \text{Arg}\,(i) = \text{Arg}\,(z) + \frac{\pi}{2}$$

b) Construire *w*



Interprétation géométrique : la multiplication d'un nombre complexe par *i*

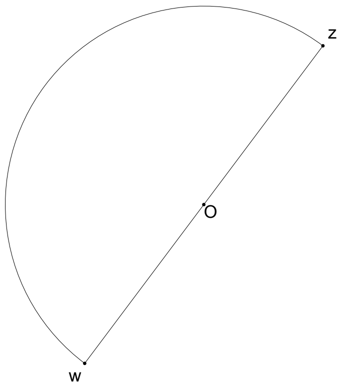
$$z \mapsto z\,i$$

consiste en une rotation dont le centre est à l'origine et dont l'angle est $\frac{\pi}{2}$.

c)

$$|w| = |z\,i^2| = |z|\,(|i|)^2 = |z|\,1^2 = |z|$$

$$\text{Arg}(w) = \text{Arg}(z\,i^2) = \text{Arg}(z) + 2\,\text{Arg}(i) = \text{Arg}(z) + 2\,\frac{\pi}{2} = \text{Arg}(z) + \pi$$



Interprétation géométrique : la multiplication d'un nombre complexe par i^2

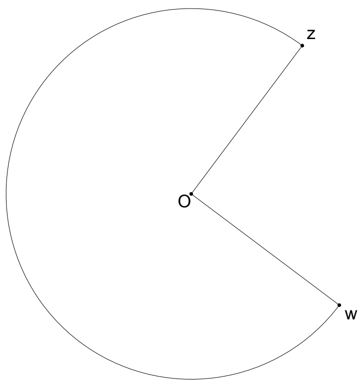
$$z \mapsto z\,i^2$$

consiste en une rotation dont le centre est à l'origine et dont l'angle est π.

d)

$$|w| = |z\,i^3| = |z|\,(|i|)^3 = |z|\,1^3 = |z|$$

$$\text{Arg}(w) = \text{Arg}(z\,i^3) = \text{Arg}(z) + 3\,\text{Arg}(i) = \text{Arg}(z) + 3\,\frac{\pi}{2} = \text{Arg}(z) + \frac{3\,\pi}{2}$$



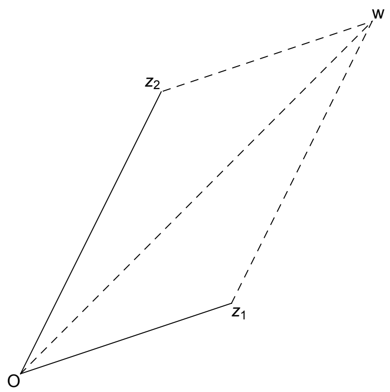
Interprétation géométrique : la multiplication d'un nombre complexe par i^3

$$z \mapsto z\,i^3$$

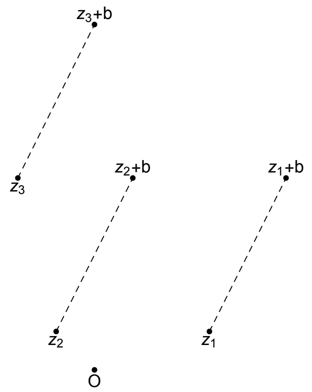
consiste en une rotation dont le centre est à l'origine et dont l'angle est $\frac{3\pi}{2}$.

Corrigé de l'exercice 2-7

a) Somme de deux nombres complexes $w = z_1 + z_2$



b) Translation $z \mapsto z + b$



Corrigé de l'exercice 2 - 8

a) <u>Sans ordinateur</u>

$$|z_1| = |2 - 2 i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1) = \operatorname{Arg}(2 - 2 i) = \arctan\left(\frac{-2}{2}\right) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$|z_2| = \left|1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\operatorname{Arg}(z_2) = \operatorname{Arg}\left(1 - i\sqrt{3}\right) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\arctan\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|\ |z_2| = 2\sqrt{2}\ 2 = 4\sqrt{2}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \equiv \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \equiv -\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{7\pi}{12} \quad (\operatorname{mod} 2\pi)$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2) \equiv -\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \equiv \frac{\pi}{12} \quad (\operatorname{mod} 2\pi)$$

b) <u>Avec Mathematica</u>

```
z1 = 2 - 2 ⅈ
```

$2 - 2\,i$

```
Abs[z1]
```
valeur absolue

$2\sqrt{2}$

```
Arg[z1]
```
argument arg

$-\frac{\pi}{4}$

```
z2 = 1 - ⅈ √3
```

$1 - i\sqrt{3}$

```
Abs[z2]
```
valeur absolue

2

```
Arg[z2]
```
argument arg

$-\frac{\pi}{3}$

```
Abs[z1 z2]
```
valeur absolue

$4\sqrt{2}$

```
Simplify[Arg[z1 z2]]
```
simplifie argument arg

$-\frac{7\pi}{12}$

```
Abs[z1/z2]
```
valeur absolue

$\sqrt{2}$

```
Simplify[Arg[z1/z2]]
```
simplifie argument arg

$\frac{\pi}{12}$

Corrigé de l'exercice 2-9

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\, e^{i\,\varphi_1}}{\rho_2\, e^{i\,\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\, e^{i\,(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Corrigé de l'exercice 2-10, sans ordinateur

$$z = \left(\sqrt{3} + i\right)^{1967}$$

$$|z| = \left(\left|\sqrt{3} + i\right|\right)^{1967} = 2^{1967}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arg}(z) &\equiv 1967 \operatorname{Arg}\left(\sqrt{3} + i\right) &&\equiv 1967 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&\equiv 1967 \frac{\pi}{6} &&\equiv (164 * 12 - 1) \frac{\pi}{6} \\
&\equiv 164 * 2\pi - \frac{\pi}{6} &&\equiv -\frac{\pi}{6} && (\operatorname{mod} 2\pi)
\end{aligned}$$

$$z = 2^{1967} e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2^{1967}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 2^{1967}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right) = 2^{1966}\sqrt{3} - i\, 2^{1966}$$

Exercice 2-10, vérifications avec Mathematica

Vérification de la réponse

$\mathbf{donnee} = \left(\sqrt{3} + i\right)^{1967};$

$\mathbf{reponse} = 2^{1966}\sqrt{3} - i\, 2^{1966};$

Simplify[Expand[donnee] - reponse]
simplifie   développe

0

Vérification de quelques calculs intermédiaires

$\mathbf{Abs}\left[\sqrt{3} + i\right]$
valeur absolue

2

$\mathbf{Arg}\left[\sqrt{3} + i\right]$
argument arg

$\frac{\pi}{6}$

$z = \left(\sqrt{3} + i\right)^{1967};$

$\frac{\mathbf{Abs}[z]}{2^{1967}}$

1

Arg[z]
argument arg

$-\frac{\pi}{6}$

$\frac{\mathbf{Re}[z]}{\mathbf{Abs}[z]}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

```
Im[z]
------
Abs[z]
```

$-\frac{1}{2}$

```
Re[2^1966 √3 - ⅈ 2^1966 - z]
```
partie réelle

0

```
Im[2^1966 √3 - ⅈ 2^1966 - z]
```
partie imaginaire

0

Exercice 2-11

Sans ordinateur

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1-i\,(x+i\,y)}{1+i\,(x+i\,y)}\right)=0 \iff \mathrm{Re}\left(\frac{1+y-i\,x}{1-y+i\,x}\right)=0$$

$$\iff \mathrm{Re}\left((1+y-i\,x)\,\frac{(1-y-i\,x)}{(1-y+i\,x)\,(1-y-i\,x)}\right)=0$$

$$\iff \mathrm{Re}\left((1+y-i\,x)\,\frac{(1-y-i\,x)}{(1-y)^2+x^2}\right)=0$$

$$\iff \mathrm{Re}\left(\frac{(1-y)\,(1+y)-x^2+i\,(-x\,(1-y)+(1+y)\,(-x))}{(1-y)^2+x^2}\right)=0$$

$$\iff \mathrm{Re}\left(\frac{(1-x^2-y^2)+i\,(-2\,x)}{(1-y)^2+x^2}\right)=0$$

$$\iff \left(\frac{1-x^2-y^2}{(1-y)^2+x^2}=0\right)$$

$$\iff \left(1-x^2-y^2=0 \quad \text{et} \quad (x,\,y)\neq(0,\,1)\right)$$

$$\iff \left(x^2+y^2=1 \quad \text{et} \quad (x,\,y)\neq(0,\,1)\right)$$

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, il s'agit du cercle de centre (0, 0), de rayon 1, duquel on a retiré le point (0, 1).
Dans le plan complexe,

$$\{z\in\mathbb{C}\mid\ |z|=1 \quad \text{et} \quad z\neq i\}$$

Résolution avec *Mathematica* (non demandé):

```
ComplexExpand[Re[(1 - ⅈ (x + ⅈ y))/(1 + ⅈ (x + ⅈ y))]] == 0
```
développe des c··· partie réelle

$$\frac{1}{x^2+(1-y)^2}-\frac{x^2}{x^2+(1-y)^2}-\frac{y^2}{x^2+(1-y)^2}==0$$

$$\text{Reduce}\left[\text{Re}\left[\frac{1-i\,(x+i\,y)}{1+i\,(x+i\,y)}\right]==0 \wedge x\in \text{Reals}\wedge y\in\text{Reals},\ \{x,y\},\ \text{Complexes}\right]$$

réduis | partie réelle | nombres réels | nombres réels | complexes

$$(x==-1\ \&\&\ y==0)\ ||\ \left(-1<x<0\ \&\&\ \left(y==-\sqrt{1-x^2}\ ||\ y==\sqrt{1-x^2}\right)\right)\ ||$$
$$(x==0\ \&\&\ y==-1)\ ||\ \left(0<x<1\ \&\&\ \left(y==-\sqrt{1-x^2}\ ||\ y==\sqrt{1-x^2}\right)\right)\ ||\ (x==1\ \&\&\ y==0)$$

Corrigé de l'exercice 2-12

Sans ordinateur

$$z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$$

$$|z|=\frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1-i|}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$\text{Arg}(z)=\text{Arg}(1+i\sqrt{3})-\text{Arg}(1-i)=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7\pi}{12}$$

$$z=\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$z^n=\left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\,n\frac{7\pi}{12}}=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(n\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(n\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

$$\text{Re}(z^n)=\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(n\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\text{Im}(z^n)=\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(n\frac{7\pi}{12}\right)$$

z^n est réel si sa partie imaginaire est nulle:

$$\sin\left(n\frac{7\pi}{12}\right)=0\quad\Longleftrightarrow\quad n\frac{7\pi}{12}=k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Longleftrightarrow\quad n=k\,\frac{12}{7},\qquad k\in\mathbb{Z}$$

Pour que n soit un entier, il faut que k soit un multiple de 7. Le plus petit entier positif n correspond à $k=7$. Il s'agit de $n=12$.

z^n est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle:

$$\cos\left(n\frac{7\pi}{12}\right)=0\quad\Longleftrightarrow\quad n\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi=\frac{(1+2k)\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Longleftrightarrow\quad n=\frac{6}{7}(1+2k),\qquad k\in\mathbb{Z}$$

Pour que n soit un entier, il faut que $(1+2k)$ soit un multiple de 7. Le plus petit entier positif n correspond à $k=3$. Il s'agit de $n=6$.

Avec *Mathematica*

$$\mathbf{z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}}$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

```
Abs[z]
```
valeur absolue

$\sqrt{2}$

```
Arg[z]
```
argument arg

$\pi + \text{ArcTan}\left[\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right]$

z^n est réel si sa partie imaginaire est nulle; c'est le cas pour $n = 12$

$\text{tabl} = \text{Table}\left[\left(\sqrt{2}\right)^n \text{Sin}\left[n \frac{7\pi}{12}\right], \{n, 1, 20\}\right]$

table sinus

$\left\{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right), -1, -2, 2\sqrt{3}, 2\left(-1+\sqrt{3}\right), -8, 4\left(-1+\sqrt{3}\right), 8\sqrt{3}, -16, -16, 16\left(1+\sqrt{3}\right), 0, -32\left(1+\sqrt{3}\right), 64, 128, -128\sqrt{3}, -128\left(-1+\sqrt{3}\right), 512, -256\left(-1+\sqrt{3}\right), -512\sqrt{3}\right\}$

```
First[Position[tabl, 0]]
```
premier position

$\{12\}$

z^n est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle; c'est le cas pour $n = 6$:

$\text{tabl} = \text{Table}\left[\left(\sqrt{2}\right)^n \text{Cos}\left[n \frac{7\pi}{12}\right], \{n, 1, 20\}\right]$

table cosinus

$\left\{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right), -\sqrt{3}, 2, 2, -2\left(1+\sqrt{3}\right), 0, 4\left(1+\sqrt{3}\right), -8, -16, 16\sqrt{3}, 16\left(-1+\sqrt{3}\right), -64, 32\left(-1+\sqrt{3}\right), 64\sqrt{3}, -128, -128, 128\left(1+\sqrt{3}\right), 0, -256\left(1+\sqrt{3}\right), 512\right\}$

```
First[Position[tabl, 0]]
```
premier position

$\{6\}$

Corrigé de l'exercice 2-13

Partie a)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}$$

$$z = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}$$

$$|z| = \left|\frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}\right| = \frac{|z_1 z_2|}{|z_1 + z_2|} = \frac{|z_1|\;|z_2|}{|z_1 + z_2|}$$

$$z = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} =$$

$$\frac{z_1 z_2\,\overline{(z_1 + z_2)}}{(z_1 + z_2)\,\overline{(z_1 + z_2)}} = \frac{z_1 z_2\,(\overline{z_1} + \overline{z_2})}{(|z_1 + z_2|)^2} = \frac{z_1 \overline{z_1} z_2 + z_1 z_2 \overline{z_2}}{(|z_1 + z_2|)^2} = \frac{(|z_1|)^2 z_2 + z_1 (|z_2|)^2}{(|z_1 + z_2|)^2}$$

$$\text{Re}(z) = \frac{(|z_1|)^2\,\text{Re}(z_2) + \text{Re}(z_1)\,(|z_2|)^2}{(|z_1 + z_2|)^2}$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{(|z_1|)^2\,\mathrm{Im}(z_2) + \mathrm{Im}(z_1)\,(|z_2|)^2}{(|z_1+z_2|)^2}$$

Partie b)

$$|z| = \frac{|z_1|\;|z_2|}{|z_1+z_2|} = \frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\;\sqrt{a_2^2+b_2^2}}{\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}} = \sqrt{\frac{(a_1^2+b_1^2)\,(a_2^2+b_2^2)}{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}}$$

$$z = \frac{(|z_1|)^2\,z_2 + z_1\,(|z_2|)^2}{(|z_1+z_2|)^2} = \frac{(a_1^2+b_1^2)\,(a_2+i\,b_2) + (a_1+i\,b_1)\,(a_2^2+b_2^2)}{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{(a_1^2+b_1^2)\,a_2 + a_1\,(a_2^2+b_2^2)}{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{(a_1^2+b_1^2)\,b_2 + b_1\,(a_2^2+b_2^2)}{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

Partie c)

$$\mathrm{Arg}(z) \equiv \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1\,z_2}{z_1+z_2}\right) \equiv \mathrm{Arg}(z_1\,z_2) - \mathrm{Arg}(z_1+z_2) \equiv$$

$$\mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) - \mathrm{Arg}(z_1+z_2) \quad (\mathrm{mod}\ 2\,\pi)$$

$$\mathrm{Arg}(z) \equiv \mathrm{Arg}\left(\frac{(|z_1|)^2\,z_2 + z_1\,(|z_2|)^2}{(|z_1+z_2|)^2}\right) \equiv$$

$$\mathrm{Arg}\left((|z_1|)^2\,z_2 + z_1\,(|z_2|)^2\right) \quad (\mathrm{mod}\ 2\,\pi)$$

$$\mathrm{Arg}(z) \equiv \mathrm{Arg}\left(\left(a_1^2+b_1^2\right)(a_2+i\,b_2) + (a_1+i\,b_1)\left(a_2^2+b_2^2\right)\right) \qquad (\mathrm{mod}\ 2\,\pi)$$

Corrigé de l'exercice 2-14

Calculs sans ordinateur

$$a = \left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\,i\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\,\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\,\frac{5}{6}\right) + i\left(\frac{2}{3}\,\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\,\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{10}{9}\,i$$

$$b = \frac{1}{z_1} = \frac{\overline{z_1}}{z_1\,\overline{z_1}} = \frac{\overline{z_1}}{(|z_1|)^2} = \frac{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\,i}{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{36}{41}\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\,i\right) = \frac{24}{41} - \frac{30\,i}{41}$$

$$c = \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2\,\overline{z_1}}{z_1\,\overline{z_1}} = \frac{1}{(|z_1|)^2}\,z_2\,\overline{z_1} = \frac{36}{41}\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{3}\,i\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\,i\right) =$$

$$\frac{36}{41}\left(\left(\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\,\frac{5}{6}\right) + i\left(\frac{7}{3}\,\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\,\frac{5}{6}\right)\right) = \frac{36}{41}\left(\frac{41}{18}+\frac{41\,i}{36}\right) = 2 + i$$

$$d = \frac{z_2}{z_1\,\overline{z_1}} = \frac{1}{(|z_1|)^2}\,z_2 = \frac{36}{41}\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{3}\,i\right) = \frac{18}{41} + \frac{84\,i}{41}$$

$$e = \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z_1\,\overline{z_2}}{z_2\,\overline{z_2}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{(|z_2|)^2}\,z_1\,\overline{z_2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{3}\right)^2}\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\,i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{3}\,i\right)\right) =$$

$$\frac{36}{205}\,\mathrm{Re}\left(\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\,i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{3}\,i\right)\right) = \frac{36}{205}\left(\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\,\frac{7}{3}\right) = \frac{2}{5}$$

$$f = \frac{\mathrm{Re}(z_1)}{\mathrm{Re}(z_2)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$g = \mathrm{Im}\left(\frac{z_2}{z_1 - z_2}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\frac{1}{2} + i\,\frac{7}{3}}{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + i\,\left(\frac{5}{6} - \frac{7}{3}\right)}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\frac{1}{2} + i\,\frac{7}{3}}{\frac{1}{6} - \frac{3\,i}{2}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{7}{3}\right)\,\left(\frac{1}{6} + \frac{3\,i}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6} - \frac{3\,i}{2}\right)\,\left(\frac{1}{6} + \frac{3\,i}{2}\right)}\right) =$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{7}{3}\right)\,\left(\frac{1}{6} + \frac{3\,i}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}\right) = \frac{18}{41}\,\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{7}{3}\right)\,\left(\frac{1}{6} + \frac{3\,i}{2}\right)\right) = \frac{18}{41}\left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{2} + \frac{7}{3}\,\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$h = \frac{\mathrm{Im}\,(z_2)}{\mathrm{Im}\,(z_1) - \mathrm{Re}\,(z_2)} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{6} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}} = 7$$

Calculs avec *Mathematica*

$$\mathbf{z1 = \frac{2}{3} + \frac{5}{6}\,i;\ z2 = \frac{1}{2} + \frac{7}{3}\,i;}$$

$$\mathbf{a = z1^2}$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{10\,i}{9}$$

$$\mathbf{b = \frac{1}{z1}}$$

$$\frac{24}{41} - \frac{30\,i}{41}$$

$$\mathbf{c = \frac{z2}{z1}}$$

$$2 + i$$

$$\mathbf{d = \frac{z2}{z1\,\mathrm{Conjugate}[z1]}}$$

$$\frac{18}{41} + \frac{84\,i}{41}$$

$$\mathbf{e = \mathrm{Re}\left[\frac{z1}{z2}\right]}$$

partie réel

$$\frac{2}{5}$$

$$\mathbf{f = \frac{\mathrm{Re}[z1]}{\mathrm{Re}[z2]}}$$

$$\frac{4}{3}$$

$$\mathbf{g = \mathrm{Im}\left[\frac{z2}{z1 - z2}\right]}$$

partie imaginair

$$\frac{1}{2}$$

```
h = Im[z2] / (Im[z1] - Re[z2])
```

7

Représentations graphiques

Coordonnées polaires { | z |, Arg(z)}

```
N[{Abs[z1], Arg[z1] / ° "°"}]
```

v··· valeur ab··· argument arg

{1.06719, 51.3402 °}

```
N[{Abs[z2], Arg[z2] / ° "°"}]
```

v··· valeur ab··· argument arg

{2.3863, 77.9052 °}

$$| z_1^2 | = (| z_1 |)^2$$

$$\mathrm{Arg}\left(z_1^2\right) \equiv 2\,\mathrm{Arg}\,(z_1) \qquad (\mathrm{mod}\ 2\,\pi)$$

```
N[{Abs[a], Arg[a] / ° "°"}]
```

v··· valeur ··· argument arg

{1.13889, 102.68 °}

$$\left| \frac{1}{z_1} \right| = \frac{1}{| z_1 |}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\,\mathrm{Arg}\,(z_1) \qquad (\mathrm{mod}\ 2\,\pi)$$

```
N[{Abs[b], Arg[b] / ° "°"}]
```

v··· valeur ··· argument arg

{0.937043, -51.3402 °}

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{| z_1 |}{| z_2 |}$$

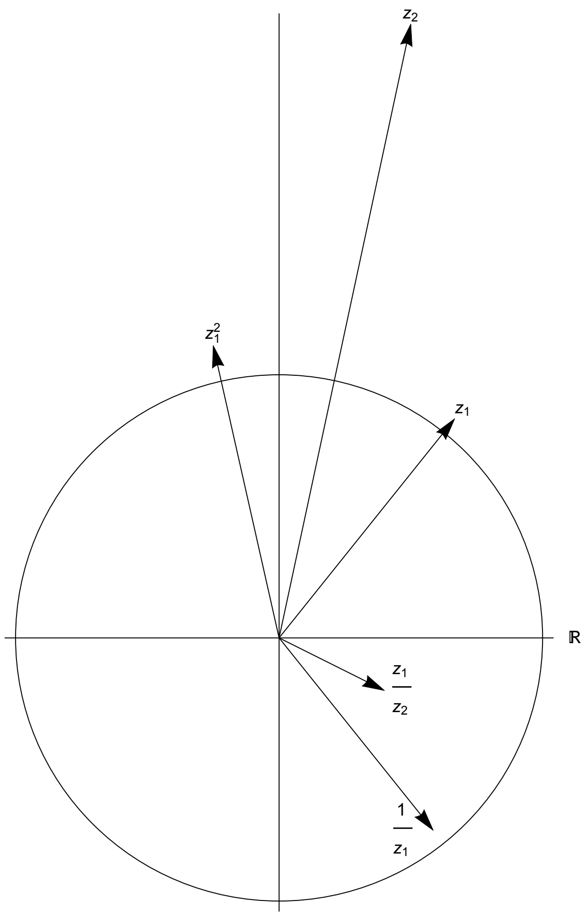
$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \mathrm{Arg}\,(z_1) - \mathrm{Arg}\,(z_2) \qquad (\mathrm{mod}\ 2\,\pi)$$

```
k = z1/z2; N[{Abs[k], Arg[k] / ° "°"}]
```

v··· valeur ··· argument arg

{0.447214, -26.5651 °}

L'étudiant doit être capable de réaliser les graphiques sans ordinateur, avec la règle et le compas. La réalisation du graphique avec *Mathematica* n'est pas demandée.



Exercice 2-15

a) Résolution sans ordinateur

$$5\,z = 8\,i\,z + 81 - 5\,i$$

$$z\,(5 - 8\,i) = 81 - 5\,i$$

$$z = \frac{81 - 5\,i}{5 - 8\,i} = 5 + 7\,i$$

Résolution avec *Mathematica*

```
Clear[z];
efface
Reduce[5 z == 8 i z + 81 - 5 i, z, Complexes]
réduis                              complexes
```

z == 5 + 7 i

b) [Sans ordinateur] Ecrivons l'inconnue sous la forme cartésienne $z = a + i\,b$ (les inconnues sont a et b où a et b sont réels):

$$z + 2\,i\,\overline{z} = 8 + 7\,i$$

$$(a + i\,b) + 2\,i\,(a - i\,b) = 8 + 7\,i$$

$$a + i\,b + 2\,i\,a + 2\,b = 8 + 7\,i$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales:

$$a + 2b = 8 \quad \text{et} \quad b + 2a = 7$$
$$a = 2 \quad \text{et} \quad b = 3$$
$$z = 2 + 3i$$

Résolution avec *Mathematica*

```
Reduce[z + 2 ⅈ Conjugate[z] == 8 + 7 ⅈ, z, Complexes]
réduis           conjugué                  complexes
```

$z == 2 + 3i$

c) [Sans ordinateur] Ecrivons l'inconnue sous la forme polaire $z = \rho\, e^{i\varphi}$ (les inconnues sont ρ et φ où ρ est un réel non négatif et φ un réel défini modulo 2π):

$$\left(\rho\, e^{i\varphi}\right)^2 = 1 + i$$
$$\rho^2 e^{i 2\varphi} = 1 + i$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments sont égaux modulo 2π:

$$\rho^2 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad 2\varphi = \frac{\pi}{4} + k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\rho = 2^{\frac{1}{4}} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\pi}{8} + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ce qui nous donne deux solutions modulo 2π

$$\rho = 2^{\frac{1}{4}} \quad \text{et} \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{8}, \quad \varphi_2 = -\frac{7\pi}{8}$$

donc deux solutions complexes

$$z_1 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right);$$
$$z_2 = 2^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{7\pi}{8}} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)\right)$$

Résolution avec *Mathematica*

```
es = Reduce[z^2 == 1 + ⅈ, z, Complexes]
     réduis                complexes
```

$z == -\sqrt{1+i} \;||\; z == \sqrt{1+i}$

```
Map[ComplexExpand, es]
app· développe des complexes
```

$z == -2^{1/4}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{8}\right] - i\,2^{1/4}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{8}\right] \;||\; z == 2^{1/4}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{8}\right] + i\,2^{1/4}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{8}\right]$

$z == -2^{1/4}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{8}\right] - i\,2^{1/4}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{8}\right] \;||\; z == 2^{1/4}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{8}\right] + i\,2^{1/4}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{8}\right]$

$z == -2^{1/4}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{8}\right] - i\,2^{1/4}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{8}\right] \;||\; z == 2^{1/4}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{8}\right] + i\,2^{1/4}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{8}\right]$

d) [Sans ordinateur] Ecrivons l'inconnue sous la forme cartésienne $z = a + i\,b$ (les inconnues sont a et b où a et b sont réels):

$$z + \frac{1}{z} = 1$$

$$\frac{z^2 - z + 1}{z} = 0$$

$$\frac{(a + i\, b)^2 - (a + i\, b) + 1}{a + i\, b} = 0$$

$$\left(a^2 - b^2 - a + 1\right) + i\,(2\, a\, b - b) = 0 \quad \text{et} \quad (a + i\, b) \neq 0$$

Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle est nulle et sa partie imaginaire est nulle

$$a^2 - b^2 - a + 1 = 0 \quad \text{et} \quad b\,(2\, a - 1) = 0$$

Résolvons d'abord la deuxième équation. Pour $b = 0$, la première équation n'a pas de solution. pour $a = \frac{1}{2}$, la première équation admet deux solutions $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions sont donc

$$\left\{z \to \frac{1}{2} + i\, \frac{\sqrt{3}}{2},\; z \to \frac{1}{2} - i\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Résolution avec *Mathematica*

```
es = Reduce[z + 1/z == 1, z, Complexes]
     réduis               complexes
```

$$z == (-1)^{1/3} \;||\; z == -(-1)^{2/3}$$

```
Map[ComplexExpand, es]
app· développe des complexes
```

$$z == \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \;||\; z == \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Exercices 2-16 c)

Calculons d'abord sans ordinateur. i^k est une suite géométrique de raison $q = i$ dont la somme des termes est donnée par (voir *Formulaires*)

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}; \qquad \sum_{k=1}^{n} q^k = q \sum_{k=1}^{n-1} q^k = q\, \frac{1 - q^n}{1 - q};$$

Compte tenu que $i^4 = 1$, on a $i^{24} = 1$ et $i^{25} = i$, donc

$$\sum_{k=1}^{25} i^k = i\, \frac{1 - i^{25}}{1 - i} = i\, \frac{1 - i}{1 - i} = i$$

Vérifions avec *Mathematica* :

$$\sum_{k=1}^{25} i^k$$

$$i$$

Exercices 2-16 d)

Calculons d'abord sans ordinateur.

$$\sum_{k=0}^{20} (1 + i)^k = (1 + i)^0 + (1 + i)^1 + (1 + i)^2 + \ldots + (1 + i)^{20}$$

$(1 + i)^k$ est une suite géométrique de raison $q = 1 + i$ dont la somme des termes est donnée par

(voir *Formulaires*)

$$\sum_{k=0}^{20} q^k = \frac{1-q^{21}}{1-q} = \frac{1-(1+i)^{21}}{-i} = i\left(1-(1+i)^{21}\right) \quad \text{où}$$

$$(1+i)^{21} =$$

$$\left(\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{21} = 2^{21/2}\, e^{\frac{1}{4} i\,(21\pi)} = 2^{21/2}\, e^{\frac{1}{4} i\,(-3\pi)} = 2^{21/2}\left(\mathrm{Cos}\left[-\frac{1}{4}(3\pi)\right] + i\,\mathrm{Sin}\left[-\frac{1}{4}(3\pi)\right]\right) =$$

$$2^{21/2}\left(\mathrm{Cos}\left[-\frac{1}{4}(3\pi)\right] + i\,\mathrm{Sin}\left[-\frac{1}{4}(3\pi)\right]\right) =$$

$$2^{21/2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2^{21/2}\left(2^{-\frac{1}{2}} + i\,2^{-\frac{1}{2}}\right) = -2^{10} - i\,2^{10} = -1024 - i\,1024$$

donc

$$\sum_{k=0}^{20} (1+i)^k = i\,(1-(-1024-i\,1024)) = i\,(1025+i\,1024) = -1024+i\,1025$$

Vérifions avec *Mathematica* :

$$\sum_{k=0}^{20} (1+i)^k$$

$-1024+1025\,i$

Exercices 2-17 h)

Calculons d'abord sans ordinateur. $(1-i)^k$ est une suite géométrique de raison $q = 1-i$ dont la somme des termes est donnée par (voir *Formulaires*)

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Compte tenu que $1-i = \sqrt{2}\,\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, on a

$(1-i)^{13} = \left(\sqrt{2}\right)^{13}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{13\pi}{4}\right)\right) = 64\left(\sqrt{2}\,\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right) = 64\,(-1+i)$, donc

$$\sum_{k=0}^{12} (1-i)^k = \frac{(1-i)^{13}-1}{(1-i)-1} = \frac{(-64+64\,i)-1}{-i} = (-65+64\,i)\,i = -64-i\,65$$

Vérifions les résultats des calculs faits à la main avec *Mathematica*

$$\sum_{k=0}^{12} (1-i)^k$$

$-64-65\,i$

Exercices 2-18

Utilisons la relation $e^{i\,3\,\varphi} = \left(e^{i\,\varphi}\right)^3$

```
Clear[φ]; ComplexExpand[e^(i 3 φ)]
```
efface — développe des complexes

`Cos[3 φ] + i Sin[3 φ]`

```
Expand[(Cos[φ] + ⅈ Sin[φ])^3]
```
développe

$\text{Cos}[\varphi]^3 + 3\,i\,\text{Cos}[\varphi]^2\,\text{Sin}[\varphi] - 3\,\text{Cos}[\varphi]\,\text{Sin}[\varphi]^2 - i\,\text{Sin}[\varphi]^3$

En comparant les parties réelles et imaginaires, on obtient les formules d'addition d'arcs (voir Formulaires)

$$\cos(3\varphi) = \cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi) = \cos(\varphi)\left(\cos^2(\varphi) - 3\sin^2(\varphi)\right) = \cos(\varphi)\left(4\cos^2(\varphi) - 3\right)$$

$$\sin(3\varphi) = 3\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - \sin^3(\varphi) = \sin(\varphi)\left(3\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right) = \sin(\varphi)\left(3 - 4\sin^2(\varphi)\right)$$

Exercices 2-19

Selon les indications,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \text{Re}\left[e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}\right] = \text{Re}\left[e^{i\frac{\pi}{3}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right] = \text{Re}\left[\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right] =$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Vérifions les résultats des calculs faits à la main avec *Mathematica*

```
Cos[π/12]
```
cosinus

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

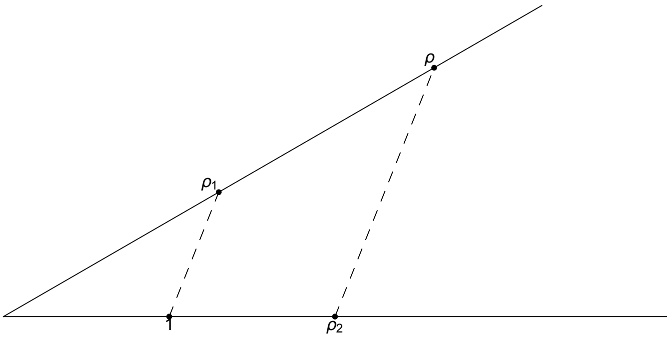
Exercice 2-20

a) <u>Produit de deux nombres complexes</u>

L'argument du produit est égal à la somme des arguments. On peut donc construire, à la règle et au compas, la demi-droite dirigée par $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$ qui supporte le produit.

Le module du produit est égal au produit des modules. Il faut donc expliquer comment, étant donné deux segments de mesures ρ_1, ρ_2 ainsi qu'un segment de mesure 1, on peut construire, avec la règle et le compas, un segment de mesure ρ qui soit égal à leur produit. Pour ce faire, basons-nous sur le théorème de Thalès

$$\frac{\rho_1}{1} = \frac{\rho}{\rho_2}$$



Sur l'axe des réels, disposons les points d'abscisses 1 et ρ_2. Sur une droite auxiliaire graduée passant par l'origine, disposons le point d'abscisse ρ_1. Traçons la droite qui passe par les points 1 et ρ_1 ainsi que sa parallèle passant par le point ρ_2. L'intersection de cette dernière avec la droite auxiliaire donne le point d'abscisse ρ.

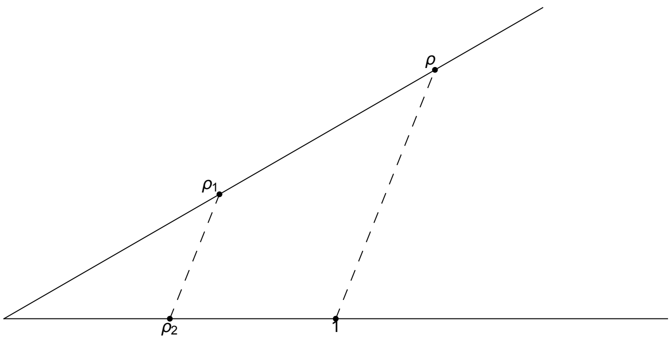
Il ne reste plus qu'à reporter, avec le compas, cette longueur ρ sur la bonne direction $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$.

b) <u>Quotient de deux nombres complexes</u>

L'argument du quotient est égal à la différence des arguments. On peut donc construire, à la règle et au compas, la demi-droite dirigée par $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ qui supporte le quotient.

Le module du quotient est égal au quotient des modules. Il faut donc expliquer comment, étant donné deux segments de mesures ρ_1, ρ_2 ainsi qu'un segment de mesure 1, on peut contruire, avec la règle et le compas, un segment de mesure ρ qui soit égal à leur quotient. Pour ce faire, basons-nous sur le théorème de Thalès

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho}{1}$$



Sur l'axe des réels, disposons les points d'abscisses 1 et ρ_2. Sur une droite auxiliaire graduée passant par l'origine, disposons le point d'abscisse ρ_1. Traçons la droite qui passe par les points ρ_2 et ρ_1 ainsi que sa parallèle passant par le point 1. L'intersection de cette dernière avec la droite auxiliaire donne le point d'abscisse ρ.

Il ne reste plus qu'à reporter, avec le compas, cette longueur ρ sur la bonne direction $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Exercices 2-21

Ecrivons l'inconnue sous la forme polaire $z = \rho\, e^{i \varphi}$ (les inconnues sont ρ et φ où ρ est un réel non négatif et φ un réel défini modulo 2 π):

$$\left(\rho\, e^{i\varphi}\right)^3 = 1$$

$$\rho^3\, e^{i\,3\varphi} = 1$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments sont égaux modulo 2 π:

$$\rho^3 = 1 \quad \text{et} \quad 3\varphi = 0 + k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\rho = 1 \quad \text{et} \quad \varphi = k\,\frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ce qui nous donne trois solutions modulo 2 π

$$\rho = 1 \quad \text{et} \quad \varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_3 = -\frac{2\pi}{3}$$

donc trois solutions complexes

$$z_1 = \cos(0) + i\sin(0) = 1;$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_3 = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Contrôlons le résultat avec *Mathematica*

```
Clear[z];
efface
Reduce[z^3 == 1, z, Complexes]
réduis         complexes
```

$z == 1 \,||\, z == -(-1)^{1/3} \,||\, z == (-1)^{2/3}$

```
es = Apply[List, Reduce[z^3 == 1, z, Complexes]] /. Equal[z, vx_] → vx
     remp··· liste réduis          complexes         égal
```

$\{1, -(-1)^{1/3}, (-1)^{2/3}\}$

```
ComplexExpand[es]
développe des complexes
```

$\left\{1, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$

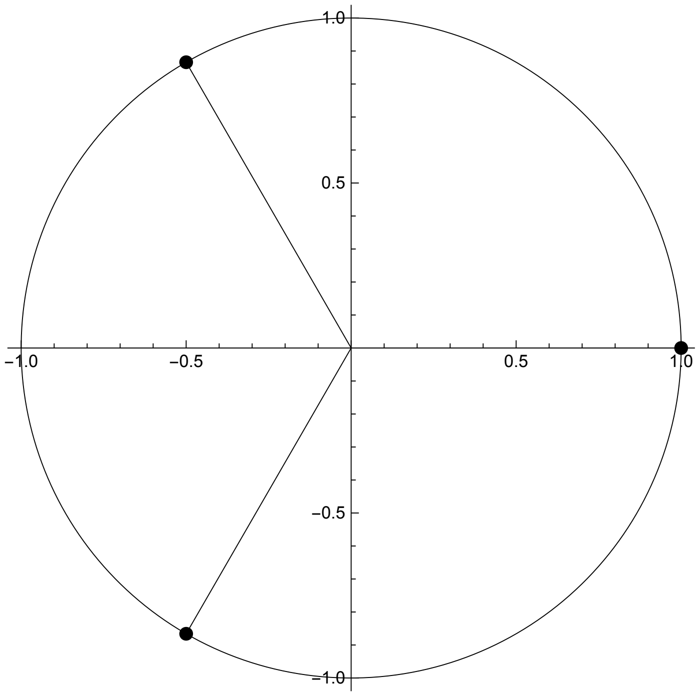
b)

```
p = Table[{Cos[2π/3 t], Sin[2π/3 t]}, {t, 0, 2}]
    table   cosinus      sinus
```

$\left\{\{1, 0\}, \left\{-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}, \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right\}$

```
Graphics[{Circle[{0, 0}, 1], PointSize[0.02`], Table[Point[p[[j]]], {j, 1, 3}],
  Table[Line[{{0, 0}, p[[j]]}], {j, 1, 3}]}, AspectRatio → Automatic, Axes → True]
```

graphique, cercle, taille des points, table, point, table, ligne, rapport d'aspect, automatique, axes, vrai



c)

$$\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_2;$$
$$\omega^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = z_3;$$
$$\omega^3 = e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^0 = 1 = z_1$$

Les racines forment une suite géométrique de raison ω.
Interprétation géométrique: 1 est une racine;
pour obtenir la racine suivante, on multiplie par ω, c'est-à-dire on tourne d'un angle $\frac{2\pi}{3}$;
et ainsi de suite.

Exercices 2-22

Ecrivons l'inconnue sous la forme polaire $z = \rho\, e^{i\varphi}$ (les inconnues sont ρ et φ où ρ est un réel non négatif et φ un réel défini modulo 2π):

$$\left(\rho\, e^{i\varphi}\right)^n = 1$$
$$\rho^n e^{i n\varphi} = 1$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments sont égaux modulo 2π.

$$\rho^n = 1 \quad \text{et} \quad n\varphi = 0 + k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\rho = 1 \quad \text{et} \quad \varphi = k\,\frac{2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ce qui nous donne n solutions modulo 2π

$$\rho = 1 \quad \text{et} \quad \varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}, \; \varphi_3 = \frac{2\pi}{3} 2, \; \ldots, \; \varphi_n = \frac{2\pi}{3}(n-1)$$

donc n solutions complexes

$$z_1 = e^0 = 1;$$
$$z_2 = e^{i \frac{2\pi}{n}};$$
$$z_2 = e^{i \frac{2\pi}{n} 2};$$
$$\ldots$$
$$z_n = e^{i \frac{2\pi}{n}(n-1)}$$

Contrôlons le résultat

$$z_j = e^{i \frac{2\pi}{n}(j-1)};$$
$$z_j^n = \left(e^{i \frac{2\pi}{n}(j-1)}\right)^n = e^{i 2\pi (j-1)} = e^0 = 1$$

b)

$$1 = z_1;$$
$$\omega = e^{i \frac{2\pi}{n}} = z_2;$$
$$\omega^2 = e^{i \frac{2\pi}{n} 2} = z_3$$
$$\omega^3 = e^{i \frac{2\pi}{n} 3} = z_4;$$
$$\ldots$$
$$\omega^{n-1} = e^{i \frac{2\pi}{n}(n-1)} = z_n$$

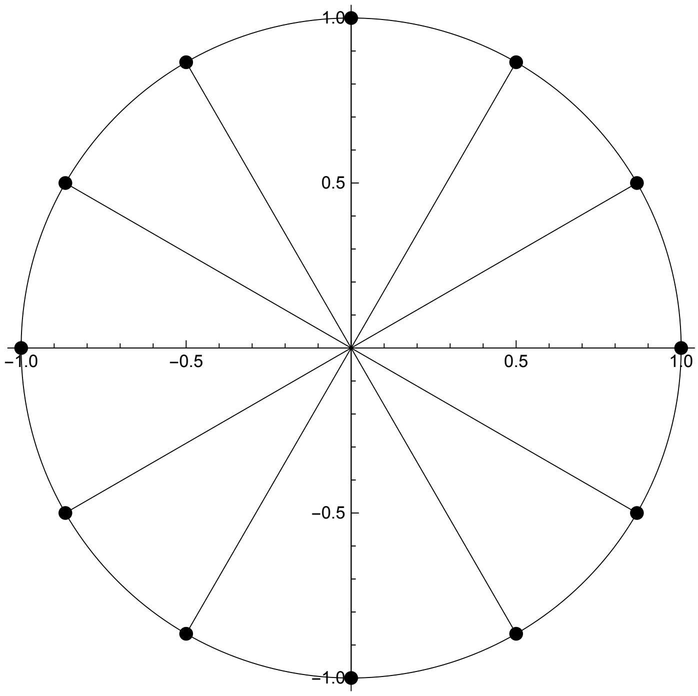
Les racines forment une suite géométrique de raison ω.
<u>Interprétation géométrique</u>: 1 est une racine;
pour obtenir la racine suivante, on multiplie par ω, c'est-à-dire on tourne d'un angle $\frac{2\pi}{n}$;
et ainsi de suite.

c) Figure pour $n = 12$

```
n = 12; p = Table[{Cos[2π/n t], Sin[2π/n t]}, {t, 0, n - 1}]
```
table cosinus sinus

$$\left\{\{1, 0\}, \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}, \{0, 1\}, \left\{-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}, \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \{-1, 0\}, \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\}, \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}, \{0, -1\}, \left\{\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}, \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\}\right\}$$

```
Graphics[{Circle[{0, 0}, 1], PointSize[0.02`], Table[Point[p[[j]]], {j, 1, n}],
  Table[Line[{{0, 0}, p[[j]]}], {j, 1, n}]}, AspectRatio → Automatic, Axes → True]
```
graphique, cercle, taille des points, table, point, table, ligne, rapport d'aspect, automatique, axes, vrai



Exercices 2-23

Ecrivons l'inconnue sous la forme polaire $z = \rho\, e^{i\varphi}$ (les inconnues sont ρ et φ où ρ est un réel non négatif et φ un réel défini modulo 2π):

$$\left(\rho\, e^{i\varphi}\right)^3 = i$$

$$\rho^3 e^{i 3\varphi} = i$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments sont égaux modulo 2π.

$$\rho^3 = 1 \quad \text{et} \quad 3\varphi = \frac{\pi}{2} + k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\rho = 1 \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\pi}{6} + k\,\frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ce qui nous donne trois solutions modulo 2π

$$\rho = 1 \quad \text{et} \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi_2 = \frac{5\pi}{6}, \quad \varphi_3 = -\frac{\pi}{2}$$

donc trois solutions complexes

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2};$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}; \quad z_3 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

Contrôlons le résultat avec *Mathematica*

```
Clear[z];
efface
Reduce[z^3 == i, z, Complexes]
réduis            complexes
```

$$z == -i \;||\; z == \frac{1}{2}\left(i - \sqrt{3}\right) \;||\; z == \frac{1}{2}\left(i + \sqrt{3}\right)$$

```
es = Apply[List, Reduce[z^3 == i, z, Complexes]] /. Equal[z, vx_] → vx
      remp··· liste réduis           complexes        égal
```

$$\left\{-i, \frac{1}{2}\left(i - \sqrt{3}\right), \frac{1}{2}\left(i + \sqrt{3}\right)\right\}$$

```
ComplexExpand[es]
développe des complexes
```

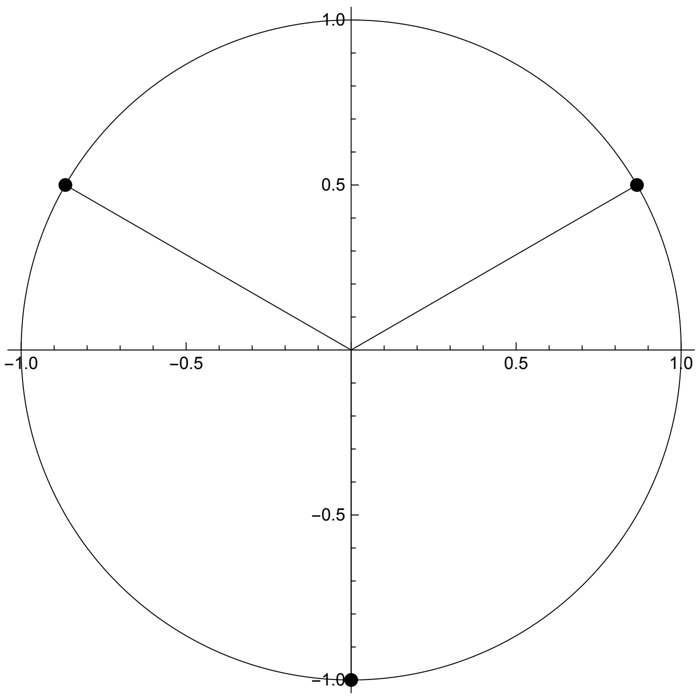
$$\left\{-i, \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

b)

```
p = Table[{Cos[π/6 + 2π/3 t], Sin[π/6 + 2π/3 t]}, {t, 0, 2}]
    table  cosinus            sinus
```

$$\left\{\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \{0, -1\}\right\}$$

```
Graphics[{Circle[{0, 0}, 1], PointSize[0.02`], Table[Point[p[[j]]], {j, 1, 3}],
graphique cercle             taille des points    table point
  Table[Line[{{0, 0}, p[[j]]}], {j, 1, 3}]}, AspectRatio → Automatic, Axes → True]
  table ligne                                rapport d'aspect automatique axes vrai
```



Exercices 2-24 [Facultatif]

Pas de corrigé disponible.

Exercices 2-25

Remarquons d'abord que

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
i^k	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$
$(i\ \varphi)^k$	$\frac{i\pi}{6}$	$-\frac{\pi^2}{36}$	$-\frac{i\pi^3}{216}$	$\frac{\pi^4}{1296}$	$\frac{i\pi^5}{7776}$	$-\frac{\pi^6}{46656}$	$-\frac{i\pi^7}{279936}$	$\frac{\pi^8}{1679616}$	$\frac{i\pi^9}{10077696}$	$-\frac{\pi^{10}}{60466176}$	$-\frac{i\pi^{11}}{362797056}$

Plus généralement, pour $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$(i\ \varphi)^{4k} = \varphi^{4k}$$
$$(i\ \varphi)^{4k+1} = i\ \varphi^{4k+1}$$
$$(i\ \varphi)^{4k+2} = -\ \varphi^{4k+2}$$
$$(i\ \varphi)^{4k+3} = -i\ \varphi^{4k+3}$$

On en déduit

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\varphi)^7}{7!} + \frac{(i\varphi)^8}{8!} + \frac{(i\varphi)^9}{9!} + \frac{(i\varphi)^{10}}{10!} + \frac{(i\varphi)^{11}}{11!} + \ldots$$
$$= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - i\frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^8}{8!} + i\frac{\varphi^9}{9!} - \frac{\varphi^{10}}{10!} - i\frac{\varphi^{11}}{11!} + \ldots$$
$$= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - \frac{\varphi^{10}}{10!} + \ldots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^9}{9!} - \frac{\varphi^{11}}{11!} + \ldots\right)$$
$$= \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$