Marcel Délèze
Edition 2017

Thème : § 2 Projections orthogonales

Lien vers les énoncés des exercices des § 2.1 et 2.4
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/ajustements/2_proj_orth.pdf

Lien vers les énoncés des exercices facultatifs du § 2.2
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/ajustements/annexes/2-2-espace-supplementaire.pdf

Corrigé de l'exercice 2.1 - 1

Le point *P** est caractérisé par les deux conditions:

$$\boxed{P^* \in G \text{ et } \overrightarrow{PP^*} \perp G}$$

La première condition s'explicite comme suit:

$$\overrightarrow{AP^*} = r_1 \overrightarrow{g_1} + r_2 \overrightarrow{g_2}$$

La deuxième condition s'écrit

$$\overrightarrow{PP^*} . \overrightarrow{g_1} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PP^*} . \overrightarrow{g_2} = 0$$

En substituant la première dans la deuxième, il vient successivement

$$\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP^*}\right) . \overrightarrow{g_1} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP^*}\right) . \overrightarrow{g_2} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{PA} . \overrightarrow{g_1} + \overrightarrow{AP^*} . \overrightarrow{g_1} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PA} . \overrightarrow{g_2} + \overrightarrow{AP^*} . \overrightarrow{g_2} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{AP^*} . \overrightarrow{g_1} = \overrightarrow{AP} . \overrightarrow{g_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AP^*} . \overrightarrow{g_2} = \overrightarrow{AP} . \overrightarrow{g_2}$$

$$\Longleftrightarrow \left(r_1 \overrightarrow{g_1} + r_2 \overrightarrow{g_2}\right) . \overrightarrow{g_1} = \overrightarrow{AP} . \overrightarrow{g_1} \quad \text{et} \quad \left(r_1 \overrightarrow{g_1} + r_2 \overrightarrow{g_2}\right) . \overrightarrow{g_2} = \overrightarrow{AP} . \overrightarrow{g_2}$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{g_1} . \overrightarrow{g_1}\, r_1 + \overrightarrow{g_2} . \overrightarrow{g_1}\, r_2 = \overrightarrow{AP} . \overrightarrow{g_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{g_1} . \overrightarrow{g_2}\, r_1 + \overrightarrow{g_2} . \overrightarrow{g_2}\, r_2 = \overrightarrow{AP} . \overrightarrow{g_2}$$

Il s'agit d'un système de deux équations à deux inconnues dont la forme matricielle est

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{g_1} . \overrightarrow{g_1} & \overrightarrow{g_2} . \overrightarrow{g_1} \\ \overrightarrow{g_1} . \overrightarrow{g_2} & \overrightarrow{g_2} . \overrightarrow{g_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{AP} . \overrightarrow{g_1} \\ \overrightarrow{AP} . \overrightarrow{g_2} \end{pmatrix}$$

Numériquement,

$$\overrightarrow{g_1} . \overrightarrow{g_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\overrightarrow{g_1} . \overrightarrow{g_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 = \overrightarrow{g_2} . \overrightarrow{g_1}$$

$$\overrightarrow{g_2} . \overrightarrow{g_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 5$$

$$\overrightarrow{AP} . \overrightarrow{g_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 11$$

$$\overrightarrow{AP} . \overrightarrow{g_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ce système d'équations, qui est symétrique, est appelé "**équations normales**" de la projection. Résolvons le système.

$$r_2 = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}; \qquad r_1 = \frac{11 + \frac{5}{3}}{2} = \frac{19}{3}$$

On détermine les coordonnées de la projection *P** comme suit:

$$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP^*} = \overrightarrow{OA} + r_1\,\overrightarrow{g_1} + r_2\,\overrightarrow{g_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{19}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{22}{3} \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P^* \left(\frac{11}{3}; \frac{22}{3}; \frac{19}{3}\right)}$$

Corrigé de l'exercice 2.1 - 2

Le point *P** est caractérisé par les deux conditions:

$$\boxed{P^* \in G \text{ et } \overrightarrow{PP^*} \perp G}$$

La première condition s'explicite comme suit:

$$\overrightarrow{AP^*} = r_1\,\overrightarrow{g_1}$$

La deuxième condition s'écrit

$$\overrightarrow{PP^*}.\overrightarrow{g_1} = 0$$

En substituant la première dans la deuxième, il vient successivement

$$\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP^*}\right).\overrightarrow{g_1} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{g_1} + \overrightarrow{AP^*}.\overrightarrow{g_1} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{AP^*}.\overrightarrow{g_1} = \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{g_1}$$

$$\Longleftrightarrow \left(r_1\,\overrightarrow{g_1}\right).\overrightarrow{g_1} = \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{g_1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{g_1}.\overrightarrow{g_1}\,r_1 = \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{g_1}$$

Il s'agit d'un système d'une équation à une inconnue dont la solution est

$$r_1 = \frac{\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{g_1}}{\overrightarrow{g_1}.\overrightarrow{g_1}}$$

$$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP^*} = \overrightarrow{OA} + r_1\,\overrightarrow{g_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{g_1}}{\overrightarrow{g_1}.\overrightarrow{g_1}}\,\overrightarrow{g_1}$$

Littéralement

$$\overrightarrow{g_1}.\overrightarrow{g_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

$$\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{g_1} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (x - x_0)\,x_1 + (y - y_0)\,y_1 + (z - z_0)\,z_1$$

$$r_1 = \frac{(x - x_0)\,x_1 + (y - y_0)\,y_1 + (z - z_0)\,z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

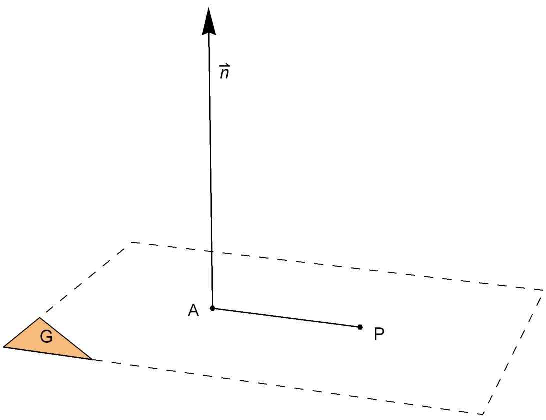
$$\overrightarrow{OP^*} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{(x - x_0)\, x_1 + (y - y_0)\, y_1 + (z - z_0)\, z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P^* \left(x_0 + \frac{(x - x_0)\, x_1 + (y - y_0)\, y_1 + (z - z_0)\, z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} x_1;\; y_0 + \frac{(x - x_0)\, x_1 + (y - y_0)\, y_1 + (z - z_0)\, z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} y_1;\; z_0 + \frac{(x - x_0)\, x_1 + (y - y_0)\, y_1 + (z - z_0)\, z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} z_1 \right)}$$

Corrigé de l'exercice 2.2 - 1 a)

$$\vec{n}.\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 4\,x - 2\,(y+1) + 3\,(z-1) = 4\,x - 2\,y + 3\,z - 5 = 0$$

Le lieu géométrique des points *P* qui vérifient cette équation est le plan qui passe par le point *A* et est orthogonal au vecteur $\vec{n}$.



Corrigé de l'exercice 2.2 - 1 b)

Considérons le sous-espace affine *H* de repère $(A,\ \vec{n})$ et effectuons d'abord la projection orthogonale de *P* sur *H*. Le point P_H est caractérisé par les deux conditions (voir la figure qui suit):

$$\boxed{P_H \in H \text{ et } \overrightarrow{PP_H} \perp H}$$

La première condition s'explicite comme suit:

$$\overrightarrow{AP_H} = r_1\, \vec{n}$$

La deuxième condition s'écrit

$$\overrightarrow{PP_H}.\vec{n} = 0$$

En substituant la première dans la deuxième, il vient successivement

$$\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP_H}\right).\vec{n} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{PA}.\vec{n} + \overrightarrow{AP_H}.\vec{n} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{AP_H}.\vec{n} = \overrightarrow{AP}.\vec{n}$$

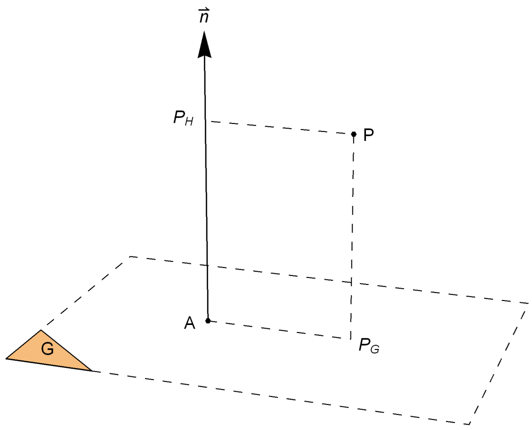
$$\Longleftrightarrow \left(r_1\, \vec{n}\right).\vec{n} = \overrightarrow{AP}.\vec{n}$$

$$\iff \quad \vec{n}.\vec{n}\, r_1 = \overrightarrow{AP}.\vec{n}$$

Il s'agit d'un système d'une équation à une inconnue dont la solution est

$$r_1 = \frac{\overrightarrow{AP}.\vec{n}}{\vec{n}.\vec{n}}$$

$$\overrightarrow{AP_H} = r_1\,\vec{n} = \frac{\overrightarrow{AP}.\vec{n}}{\vec{n}.\vec{n}}\,\vec{n}$$



On en déduit rapidement la projection de *P* sur *G*:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_G} + \overrightarrow{AP_H} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{AP_G} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AP_H}$$

$$\overrightarrow{OP_G} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP_G} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AP_H} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} - \frac{\overrightarrow{AP}.\vec{n}}{\vec{n}.\vec{n}}\,\vec{n} = \boxed{\overrightarrow{OP} - \frac{\overrightarrow{AP}.\vec{n}}{\vec{n}.\vec{n}}\,\vec{n}}$$

Numériquement,

$$\vec{n}.\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 29$$

$$\overrightarrow{AP}.\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -36$$

$$r_1 = -\frac{36}{29}$$

$$\overrightarrow{OP_G} = \overrightarrow{OP} - r_1\,\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{36}{29}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 115 \\ 102 \\ -37 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P_G\left(\frac{115}{29}; \frac{102}{29}; -\frac{37}{29}\right) \simeq P_G\,(3.96552;\ 3.51724;\ -1.27586)}$$

Vérifications : $P_G \in G$ et $\overrightarrow{PP_G}$ est un multiple de $\vec{n}$

$$\mathbf{4\,\frac{115}{29} - 2\,\frac{102}{29} + 3\left(-\frac{37}{29}\right) - 5}$$

0

$$\left\{\frac{115}{29}+1, \frac{102}{29}-6, -\frac{37}{29}+5\right\}-\frac{36}{29}\{4,-2,3\}$$

$\{0, 0, 0\}$

Corrigé de l'exercice 2.2 - 2

Considérons le sous-espace affine H de base ($\vec{n}$) et effectuons d'abord la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur H. Le vecteur $\vec{v_H}$ est caractérisé par les deux conditions:

$$\vec{v_H} \in \mathrm{H} \quad \text{et} \quad \vec{e} \perp \mathrm{H} \quad \text{où} \quad \vec{e} = \vec{v_H} - \vec{v}$$

La première condition s'explicite comme suit:

$$\vec{v_H} = r_1 \vec{n}$$

La deuxième condition s'écrit

$$\left(\vec{v_H} - \vec{v}\right).\vec{n} = 0$$

En substituant la première dans la deuxième,

$$\left(r_1 \vec{n} - \vec{v}\right).\vec{n} = 0$$

$$\Longleftrightarrow r_1 \vec{n}.\vec{n} = \vec{v}.\vec{n}$$

Il s'agit d'un système d'une équation à une inconnue dont la solution est

$$r_1 = \frac{\vec{v}.\vec{n}}{\vec{n}.\vec{n}}$$

$$\vec{v_H} = r_1 \vec{n} = \frac{\vec{v}.\vec{n}}{\vec{n}.\vec{n}} \vec{n}$$

Pour calculer $\vec{w}$, on utilise la symétrie par rapport à G (dans le cours, voir la figure donnée dans les indications):

$$\vec{w} = \vec{v} - 2\,\vec{v_H} = \boxed{\vec{v} - 2\,\frac{\vec{v}.\vec{n}}{\vec{n}.\vec{n}}\,\vec{n}}$$

Corrigé de l'exercice 2.2 - 3

<u>Plan du calcul</u>

On peut décomposer le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en deux composantes:

$\overrightarrow{AQ}$ qui est parallèle au plan π donné et

$\overrightarrow{QP}$ qui est perpendiculaire au plan π donné (voir la figure dans *Formulaires et tables*).

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}$$

Il est plus simple de calculer d'abord $\overrightarrow{QP}$ après quoi on peut obtenir la projection sur lae paln π par simple différence $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{QP}$.

<u>Première étape</u>

Puisque $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan, $\vec{n}$ est aussi un vecteur directeur de la droite perpendiculaire au plan π.

Effectuons d'abord la projection orthogonale $\overrightarrow{QP}$ du vecteur $\overrightarrow{AP}$ sur la perpendiculaire au plan. Le vecteur $\overrightarrow{QP}$ est caractérisé par les deux conditions:

$$\overrightarrow{QP} = r_1 \vec{n} \qquad \text{et} \qquad \vec{e} \perp \vec{n} \quad \text{où} \quad \vec{e} = \overrightarrow{QP} - \overrightarrow{AP}$$

La deuxième condition s'écrit

$$\left(\overrightarrow{QP} - \overrightarrow{AP}\right).\vec{n} = 0$$

En substituant la première dans la deuxième,

$$\left(r_1 \vec{n} - \overrightarrow{AP}\right).\vec{n} = 0$$

$$\Longleftrightarrow r_1 \vec{n}.\vec{n} = \overrightarrow{AP}.\vec{n}$$

Il s'agit d'un système d'une équation à une inconnue dont la solution est

$$r_1 = \frac{\overrightarrow{AP}.\vec{n}}{\vec{n}.\vec{n}}$$

$$\overrightarrow{QP} = r_1 \vec{n} = \frac{\overrightarrow{AP}.\vec{n}}{\vec{n}.\vec{n}} \vec{n} = \frac{\overrightarrow{AP}.\vec{n}}{\| \vec{n} \|^2} \vec{n}$$

<u>Deuxième étape</u>

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AP} - \frac{\overrightarrow{AP}.\vec{n}}{\| \vec{n} \|^2} \vec{n}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} - \frac{\overrightarrow{AP}.\vec{n}}{\| \vec{n} \|^2} \vec{n} = \overrightarrow{OP} - \frac{\overrightarrow{AP}.\vec{n}}{\| \vec{n} \|^2} \vec{n}$$

Corrigé de l'exercice 2.4 - 1 a)   Problème de moindres carrés

Le mélange visé est

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 800 \\ 300 \\ 200 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Les mélanges possibles sont

$$\vec{w} = r_1 \overrightarrow{g_1} + r_2 \overrightarrow{g_2} + r_3 \overrightarrow{g_3} \quad \text{où} \quad \overrightarrow{g_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{g_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{g_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des mélanges possibles forment un sous-espace vectoriel G de dimension 3 dans $\mathbb{R}^5$.

L'écart entre un mélange possible et le mélange visé est

$$\vec{e} = \vec{v} - \vec{w} = \vec{v} - r_1 \overrightarrow{g_1} - r_2 \overrightarrow{g_2} - r_3 \overrightarrow{g_3} = \begin{pmatrix} 800 - 5 r_1 - 2 r_3 \\ 300 - r_1 - 3 r_2 \\ 200 - r_1 - r_2 - 3 r_3 \\ 300 - r_1 - r_2 - 2 r_3 \\ 400 - 2 r_1 - r_2 - 4 r_3 \end{pmatrix}$$

Le problème des moindres carrés s'énonce: *Déterminez les nombres* r_1, r_2, r_3 *de telle sorte que l'expression suivante soit minimale:*

$$\vec{e}^2 = \left(\| \vec{v} - \vec{w} \|\right)^2 = (800 - 5 r_1 - 2 r_3)^2 + (300 - r_1 - 3 r_2)^2 +$$
$$(200 - r_1 - r_2 - 3 r_3)^2 + (300 - r_1 - r_2 - 2 r_3)^2 + (400 - 2 r_1 - r_2 - 4 r_3)^2$$

Corrigé de l'exercice 2.4 - 1 b et c)   Problème de projection orthogonale

D'une manière équivalente, le problème précédent se reformule en termes de projections: *Déterminez la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur G*. La projection $\vec{w}$ est caractérisée par les conditons suivantes:

$$\vec{w} \in G \quad \text{et} \quad \left(\vec{w} - \vec{v}\right) \perp G$$

En équations

$$\vec{w} = r_1 \overrightarrow{g_1} + r_2 \overrightarrow{g_2} + r_3 \overrightarrow{g_3} \quad \text{et} \quad \left(\vec{w} - \vec{v}\right) . \overrightarrow{g_1} = 0, \quad \left(\vec{w} - \vec{v}\right) . \overrightarrow{g_2} = 0, \quad \left(\vec{w} - \vec{v}\right) . \overrightarrow{g_3} = 0$$

Substituons $\vec{w}$

$$\begin{gathered}\left(r_1 \overrightarrow{g_1} + r_2 \overrightarrow{g_2} + r_3 \overrightarrow{g_3} - \vec{v}\right) . \overrightarrow{g_1} = 0, \\ \left(r_1 \overrightarrow{g_1} + r_2 \overrightarrow{g_2} + r_3 \overrightarrow{g_3} - \vec{v}\right) . \overrightarrow{g_2} = 0, \\ \left(r_1 \overrightarrow{g_1} + r_2 \overrightarrow{g_2} + r_3 \overrightarrow{g_3} - \vec{v}\right) . \overrightarrow{g_3} = 0\end{gathered}$$

On obtient les équations normales

$$\begin{gathered}r_1 \overrightarrow{g_1} . \overrightarrow{g_1} + r_2 \overrightarrow{g_2} . \overrightarrow{g_1} + r_3 \overrightarrow{g_3} . \overrightarrow{g_1} = \vec{v} . \overrightarrow{g_1}, \\ r_1 \overrightarrow{g_1} . \overrightarrow{g_2} + r_2 \overrightarrow{g_2} . \overrightarrow{g_2} + r_3 \overrightarrow{g_3} . \overrightarrow{g_2} = \vec{v} . \overrightarrow{g_2}, \\ r_1 \overrightarrow{g_1} . \overrightarrow{g_3} + r_2 \overrightarrow{g_2} . \overrightarrow{g_3} + r_3 \overrightarrow{g_3} . \overrightarrow{g_3} = \vec{v} . \overrightarrow{g_3}\end{gathered}$$

Sous la forme matricielle, les équations normales s'écrivent

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{g_1} . \overrightarrow{g_1} & \overrightarrow{g_2} . \overrightarrow{g_1} & \overrightarrow{g_3} . \overrightarrow{g_1} \\ \overrightarrow{g_1} . \overrightarrow{g_2} & \overrightarrow{g_2} . \overrightarrow{g_2} & \overrightarrow{g_3} . \overrightarrow{g_2} \\ \overrightarrow{g_1} . \overrightarrow{g_3} & \overrightarrow{g_2} . \overrightarrow{g_3} & \overrightarrow{g_3} . \overrightarrow{g_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v} . \overrightarrow{g_1} \\ \vec{v} . \overrightarrow{g_2} \\ \vec{v} . \overrightarrow{g_3} \end{pmatrix}$$

```
v = {800, 300, 200, 300, 400};
g1 = {5, 1, 1, 1, 2};
g2 = {0, 3, 1, 1, 1};
g3 = {2, 0, 3, 2, 4};
```

$$\begin{pmatrix} 32 & 7 & 23 \\ 7 & 12 & 9 \\ 23 & 9 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5600 \\ 1800 \\ 4400 \end{pmatrix}$$

dont la solution est, en nombre de sacs par sorte de mélange,

```
r = LinearSolve[{{32, 7, 23}, {7, 12, 9}, {23, 9, 33}}, {5600, 1800, 4400}];
```

résous équation linéaire

```
N[r]
```

valeur numérique

```
{156.314, 50.9475, 10.4927}
```

La réponse, exprimée en kg de chaque sorte de céréale, est

```
w = r[[1]] g1 + r[[2]] g2 + r[[3]] g3; N[w]
```

valeur

```
{802.553, 309.156, 238.739, 228.247, 405.546}
```

Par suite, la quantité totale de mélange, en kg, est donc

```
N[Apply[Plus, w]]
```

·· remp··· plus

```
1984.24
```

Corrigé de l'exercice 2.4 - 1 d) Comparaison

```
Needs["Tableaux`",
  "https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/packages/Tableaux.m"]
```

```
afficheTableau[{"Céréale", "Mélange visé [%]", "Mélange obtenu [%]"},
 None, {{"Froment", "Avoine", "Millet", "Seigle", "Orge"},
  N[100 v / Apply[Plus, v]], N[100 w / Apply[Plus, w]]}]
```

Céréale	Froment	Avoine	Millet	Seigle	Orge
Mélange visé [%]	40.	15.	10.	15.	20.
Mélange obtenu [%]	40.4464	15.5806	12.0318	11.503	20.4383

Les résidus les plus importants sont

un déficit en seigle (manque 3.5 %);

un excès de millet (2 % de trop).