§ 4 Les fondements théoriques de la propagation des incertitudes

Prérequis

Le paragraphe 4 du *Calcul d'erreur* se fonde sur d'autres chapitres qu'il est conseillé d'étudier auparavant:

- Fonctions de plusieurs variables I et dérivées partielles
- Fonctions de plusieurs variables II et différentielles
- Statistique II

§ 4.1 L'incertitude sur les données expérimentales

Nous considérons la situation suivante:

on mesure deux grandeurs physiques x, y, puis on calcule la grandeur z au moyen d'une loi théorique décrite par une fonction f, à savoir $z = f(x, y)$.

La mesure de la grandeur x donne une valeur numérique numérique x_1. Comme la mesure est entachée d'une certaine incertitude, une deuxième mesure de x donne une valeur x_2 qui peut s'écarter quelque peu de x_1. En effectuant une suite de n mesures, on obtient un échantillon de taille n

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; \ldots, \; x_n$$

D'une manière analogue, les mesures de y définissent un échantillon de taille k

$$y_1, \; y_2, \; y_3, \; \ldots, \; y_k$$

Les résultats des mesures peuvent être résumés par deux paramètres : la moyenne et l'incertitude. La moyenne arithmétique est une estimation sans biais de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire

$$\hat{\mu}_X = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

$$\hat{\mu}_Y = \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_k}{k}$$

Pour l'incertitude, nous distinguons diverses situations.

Cas où l'on dispose d'au moins 6 mesures indépendantes

On suppose $n \geq 6$, respectivement $k \geq 6$. Une estimation non biaisée de l'écart-type de la variable aléatoire X associée à x est (voir *Statistique II, § 2.5*):

$$\hat{\sigma}_X = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Les fluctuations aléatoires de la moyenne $M(X)$ de n variables indépendantes sont plus faibles que celles de X. Plus précisément, l'écart-type est divisé par $\sqrt{n}$, respectivement par $\sqrt{k}$ (voir *Statistique II, § 2.4*):

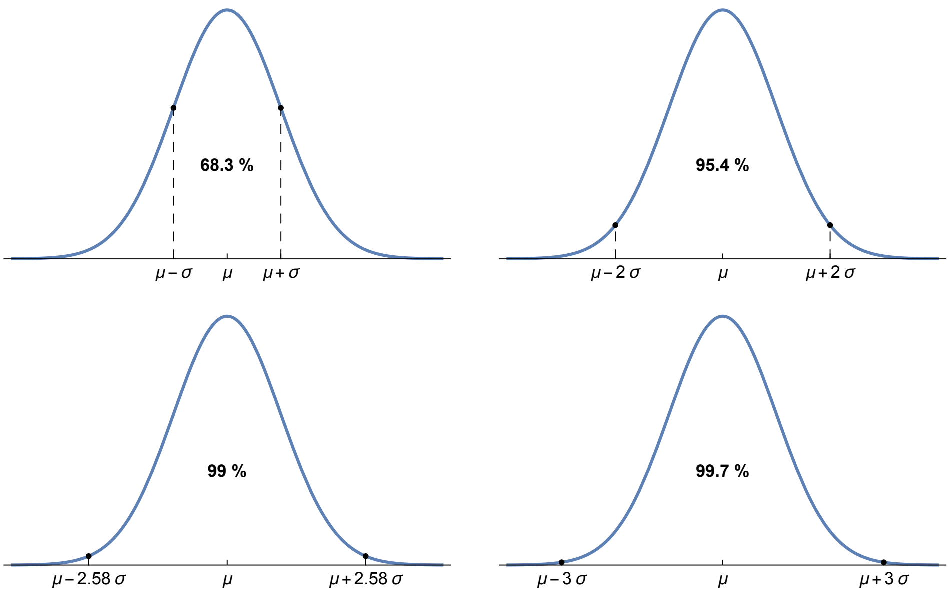
$$\sigma_{\hat{M}(X)} = \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \bar{x}\right)^2}{n\,(n-1)}}$$

$$\sigma_{\hat{M}(Y)} = \frac{\hat{\sigma}_Y}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{\left(y_1 - \bar{y}\right)^2 + \left(y_2 - \bar{y}\right)^2 + \ldots + \left(y_k - \bar{y}\right)^2}{k\,(k-1)}}$$

Il est peu probable que la valeur absolue de l'erreur $\left| \mu_X - \bar{x} \right|$ soit supérieure à 2 ou 3 fois l'écart-type. Aussi définit-on l'incertitude absolue comme étant un multiple positif fixé de l'écart-type

$$\boxed{\Delta x = c \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}} \qquad \text{où} \qquad c > 0}$$

Dans le cas où la distribution est normale et lorsque la constante de proportionnalité vaut $c = 2.58$, le 99 × % des valeurs de x tombent dans l'intervalle $[\mu_X - \Delta x,\ \mu_X + \Delta x]$.
Avec $c = 1$, ce serait le 68.3 × %.
Avec $c = 2$, ce serait le 95.4 × %.
Avec $c = 3$, ce serait le 99.7 × %.



Si la distribution n'est pas normale, par exemple si la densité de distribution n'est pas symétrique autour de μ, alors les pourcentages donnés ci-dessus dépendent de la forme de la courbe. Qualitativement, on peut cependant raisonner d'une manière semblable et affirmer qu'il est pratiquement certain que $\mu_X - 3\,\sigma \le x \le \mu_X + 3\,\sigma$.

On choisit la même valeur c pour toutes les variables. Nous verrons (dans les paragraphes 3.3 et 3.4) qu'on retrouve alors cette valeur c dans le résultat du calcul :

$$\Delta x = c \cdot \sigma_{\hat{M}(X)}$$
$$\Delta y = c \cdot \sigma_{\hat{M}(Y)}$$
$$\Delta z = c \cdot \hat{\sigma}_Z$$

Finalement

$$\boxed{\Delta x = c \cdot \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots + (x_n-\bar{x})^2}{n\,(n-1)}}}$$

$$\Delta y = c \cdot \sqrt{\frac{(y_1-\bar{y})^2 + (y_2-\bar{y})^2 + \ldots + (y_k-\bar{y})^2}{k\,(k-1)}}$$

L'hypothèse "*les n mesures de x sont indépendantes*" est difficile à remplir. Pour un statisticien, des mesures indépendantes sont effectuées par des équipes différentes avec d'autres appareils de mesure. Si on répète les mesures sur le même dispositif expérimental, le risque est grand que certaines erreurs soient entachées d'un biais systématique. Il s'ensuit alors que l'incertitude donnée par la méthode $\Delta x = c \cdot \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}}$ est sous-évaluée. C'est pourquoi, dans la pratique, la méthode que nous venons de décrire est assez peu utilisée. Elle joue par contre rôle théorique important car c'est à partir de ce point de vue que la théorie de la propagation des incertitudes a été développée.

Lorsqu'on ne dispose que de 1 à 5 mesure(s) ou lorsque les mesures ne sont pas indépendantes

Si $n \leq 5$ ou si les mesures ne sont pas indépendantes, on considère généralement que l'estimation $\hat{\sigma}_X$ n'est pas fiable. Il faut alors définir l'incertitude par un autre moyen. Souvent, Δx peut être estimé par l'incertitude de l'instrument de mesure utilisé.

Si x est une masse, il faut lire la notice du fabricant de la balance dans laquelle on devrait trouver une estimation de l'erreur, par exemple $\Delta x = 0.5\,\text{mg}$ pour $x = 100\,g$. Si y est une température mesurée au moyen d'un thermomètre, on peut, par des expériences préalables, comparer la température donnée par le thermomètre au point de fusion d'un corps dont la température de fusion est connue et ainsi estimer l'erreur Δy. Chaque appareil de mesure devrait être accompagné d'une documentation technique incluant une estimation de l'incertitude sur la mesure.

Incertitudes relatives

L'incertitude étant non négative, on définit l'incertitude relative comme le rapport de l'incertitude à la valeur absolue

$$\frac{\Delta x}{|x|}, \qquad \frac{\Delta y}{|y|}, \qquad \ldots$$

§ 4.2 Estimation de l'incertitude au moyen d'une simulation Exemple

On a mesuré les deux composantes d'une force $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ avec les incertitude ΔF_x, ΔF_y et une masse m avec l'incertitude Δm. On a obtenu

$$F_x = 0.8\,\text{N} \qquad F_y = 1.4\,\text{N} \qquad m = 0.185\,\text{kg}$$
$$\Delta F_x = 0.05\,\text{N} \qquad \Delta F_y = 0.05\,\text{N} \qquad \Delta m = 0.001\,\text{kg}$$

On demande d'estimer l'incertitude sur l'accélération

$$a = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{m}$$

La méthode que nous allons utiliser est appelée **méthode de Monte Carlo**.

Première étape: en considérant F_x, F_y et m comme des variables aléatoires, estimons leurs écart-types respectifs σ_x, σ_y et σ_m. En admettant que

$$\Delta F_x = 2.58\,\sigma_x \qquad \Delta F_y = 2.58\,\sigma_y \qquad \Delta m = 2.58\,\sigma_m$$

ce qui, pour une distribution normale, correspond au seuil de confiance de 99 × %, nous en déduisons

$$\sigma_x = \frac{\Delta F_x}{2.58} \simeq 0.02 \qquad \sigma_y = \frac{\Delta F_y}{2.58} \simeq 0.02 \qquad \sigma_m = \frac{\Delta m}{2.58} \simeq 0.0004$$

Le choix de la valeur $c = 2.58$ n'influence pas le résultat car c'est la même valeur de c que l'on retrouvera dans le résultat (voir § 1.3 et exercice 1-2).

Deuxième étape : on tire au hasard n valeurs de (F_x, F_y, m) distribuées comme suit:

F_x est une variable aléatoire normale de moyenne 0.8 et d'écart-type 0.02;

F_y est une variable aléatoire normale de moyenne 1.4 et d'écart-type 0.02;

m est une variable aléatoire normale de moyenne 0.185 et d'écart-type 0.0004

```
distrX = NormalDistribution[0.8, 0.02];
         distribution normale
distrY = NormalDistribution[1.4, 0.02];
         distribution normale
distrM = NormalDistribution[0.185, 0.0004];
         distribution normale
```

```
n = 60;
echX = RandomReal[distrX, n]
       nombre réel aléatoire
```

```
{0.778637, 0.794538, 0.796533, 0.774538, 0.820912, 0.801523, 0.817462,
 0.786595, 0.815632, 0.762111, 0.825044, 0.790919, 0.779994, 0.795197,
 0.786613, 0.807822, 0.823421, 0.785433, 0.7856, 0.811466, 0.774926, 0.794673,
 0.837003, 0.784305, 0.787383, 0.815726, 0.758918, 0.816502, 0.818049,
 0.775088, 0.822111, 0.824374, 0.796905, 0.800645, 0.809076, 0.810635,
 0.787551, 0.770528, 0.785491, 0.801893, 0.813257, 0.790882, 0.784058, 0.826127,
 0.815208, 0.794843, 0.799511, 0.783784, 0.798666, 0.784773, 0.832089, 0.795655,
 0.782352, 0.796657, 0.796295, 0.796497, 0.81962, 0.831179, 0.822634, 0.806048}
```

```
echY = RandomReal[distrY, n]
       nombre réel aléatoire
```

```
{1.40741, 1.40958, 1.41839, 1.38744, 1.37232, 1.42788, 1.41213, 1.36471,
 1.38024, 1.38254, 1.42871, 1.41767, 1.35266, 1.38628, 1.42135, 1.41716,
 1.37697, 1.39252, 1.37296, 1.40193, 1.40463, 1.39149, 1.40346, 1.41304,
 1.42138, 1.39062, 1.37981, 1.39944, 1.38434, 1.40386, 1.37275, 1.4026, 1.39504,
 1.39109, 1.39316, 1.39844, 1.41262, 1.41105, 1.4062, 1.40268, 1.39138, 1.4357,
 1.41407, 1.39171, 1.40656, 1.38119, 1.36911, 1.37406, 1.42295, 1.39708, 1.39219,
 1.38898, 1.39051, 1.39189, 1.38233, 1.40461, 1.44414, 1.4106, 1.3955, 1.39764}
```

```
echM = RandomReal[distrM, n]
       nombre réel aléatoire
```

```
{0.185525, 0.185617, 0.184776, 0.184972, 0.185593, 0.184837, 0.185219,
 0.185293, 0.185008, 0.185064, 0.184676, 0.185328, 0.184951, 0.184995,
 0.185381, 0.184774, 0.186303, 0.185069, 0.184536, 0.185233, 0.185114,
 0.185116, 0.184344, 0.184525, 0.185394, 0.184272, 0.185121, 0.185027,
 0.184794, 0.184793, 0.184587, 0.185151, 0.185301, 0.184568, 0.184714, 0.18563,
 0.184952, 0.184876, 0.185531, 0.185259, 0.185014, 0.185402, 0.185733, 0.184263,
 0.184963, 0.185116, 0.185944, 0.184869, 0.185071, 0.185095, 0.185187, 0.185551,
 0.185047, 0.18498, 0.18521, 0.185342, 0.184675, 0.185272, 0.184919, 0.184518}
```

Troisième étape : pour chaque valeur de (F_x, F_y, m), nous calculons la valeur correspondante de $a = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{m}$ et en formons une liste de n valeurs

$$a = \frac{\sqrt{Fx^2 + Fy^2}}{m} \text{ /. \{Fx} \to \text{echX, Fy} \to \text{echY, m} \to \text{echM\}}$$

```
{8.6697, 8.71734, 8.80386, 8.59047, 8.61625, 8.85897, 8.8094, 8.50095, 8.66567,
 8.53049, 8.9336, 8.75943, 8.44243, 8.63894, 8.76303, 8.82827, 8.61174, 8.63868,
 8.57192, 8.7449, 8.66608, 8.65633, 8.86441, 8.75821, 8.76457, 8.74911, 8.50657,
 8.75664, 8.7015, 8.67786, 8.6685, 8.78699, 8.67025, 8.69621, 8.72186, 8.70766,
 8.74455, 8.69621, 8.68164, 8.72136, 8.71079, 8.84092, 8.70545, 8.78331,
 8.78946, 8.60848, 8.52653, 8.55679, 8.81698, 8.65719, 8.75815, 8.62688,
 8.62205, 8.66985, 8.61336, 8.71213, 8.99155, 8.83715, 8.76016, 8.74397}
```

Quatrième étape : nous calculons l'écart-type de la liste a

```
sa = StandardDeviation[a]
     écart-type
```

```
0.105095
```

puis l'incertitude correspondante

```
Δa = 2.58 sa
```

```
0.271145
```

Si on exécute une nouvelle fois le programme précédent, le résultat pourra être un peu différent. Pour obtenir des résultats moins fluctuants, on pourrait augmenter la valeur de n. Mais la simulation a été faite pour comprendre la nature stochastique de l'incertitude et c'est habituellement par une autre méthode que l'on calcule l'erreur.

§ 4.3 Le modèle théorique pour une mesure

Variables aléatoires

X et Y étant des variables aléatoires d'espérances μ_X, μ_Y et d'écart-types σ_X, σ_Y, il s'ensuit que l'expression $Z = f(X, Y)$ représente une variable aléatoire dont l'espérance et l'écart-type sont notés μ_Z et σ_Z. Ce modèle est utilisé lorsqu'on ne dispose que d'une seule valeur de x et y (c'est-à-dire $n = 1$ et $k = 1$).

Nous effectuons maintenant un changement de variables appelé *centrage*

$$\Delta X = X - \mu_X$$
$$\Delta Y = Y - \mu_Y$$
$$Z = f(\mu_X + \Delta X, \mu_Y + \Delta Y)$$

$$\Delta Z = f(\mu_X + \Delta X, \mu_Y + \Delta Y) - f(\mu_X, \mu_Y)$$
$$Z = f(\mu_X, \mu_Y) + \Delta Z$$

Les grandeurs physiques *x* et *y* peuvent être indépendantes ou liées par une relation. Nous supposons par contre que les variables aléatoires ΔX et ΔY sont indépendantes. En effet, ΔX et ΔY représentent les multiples sources d'imprécision qui peuvent affecter le résultat d'une mesure et qui sont aléatoires. On a

$$E(\Delta X) = E(X - \mu_X) = E(X) - \mu_X = 0$$
$$E(\Delta Y) = E(Y - \mu_Y) = E(Y) - \mu_Y = 0$$
$$E(\Delta Z) = E(Z - f(\mu_X, \mu_Y)) = E(Z) - f(\mu_X, \mu_Y) = \mu_Z - f(\mu_X, \mu_Y)$$

On doit distinguer

$$\mu_Z = E(Z) = E(f(X, Y))$$
$$f(\mu_X, \mu_Y) = f(E(X), E(Y))$$

Cependant, lorsqu'on ne dispose que d'une seule mesure que nous notons (*x*, *y*), leurs estimateurs coïncident

$$\hat{\mu}_Z = E(\hat{Z}) = f(x, y)$$
$$f(\hat{\mu}_X, \hat{\mu}_Y) = f(x, y)$$
$$E(\Delta \hat{Z}) = 0$$

Pour les écart-types

$$S(\Delta X) = S(X - \mu_X) = S(X) = \sigma_X$$
$$S(\Delta Y) = S(Y - \mu_Y) = S(Y) = \sigma_Y$$
$$S(\Delta Z) = S(Z - f(\mu_X, \mu_Y)) = S(Z) = \sigma_Z$$

Linéarisation par la différentielle totale

Dans le but de déterminer σ_Z, nous approximons l'accroissement de la fonction *f* par la différentielle totale (voir cours *Fonctions de plusieurs variables, § 4*):

$$\Delta Z = f(\mu_X + \Delta X, \mu_Y + \Delta Y) - f(\mu_X, \mu_Y)$$
$$dZ = \frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial x} \Delta X + \frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial y} \Delta Y$$

Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes

Dans cette dernière expression, les différentielles partielles $\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial x} \Delta X$ et $\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial y} \Delta Y$ sont des variables aléatoires indépendantes. D'après le cours Statistique II, § 2.3, on a

$$\begin{aligned}
\sigma_Z^2 = V(dZ) &= V\left(\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial x} \Delta X\right) + V\left(\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial y} \Delta Y\right) \\
&= \left(\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial x}\right)^2 V(\Delta X) + \left(\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial y}\right)^2 V(\Delta Y) \\
&= \left(\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial x}\right)^2 \sigma_X^2 + \left(\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 \\
&= \left(\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial x} \sigma_X\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial y} \sigma_Y\right)^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\sigma_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial x}\sigma_X\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial y}\sigma_Y\right)^2}$$

Loi de propagation des incertitudes

En multipliant les deux membres par une constante positive c

$$c\,\sigma_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial x}c\,\sigma_X\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial y}c\,\sigma_Y\right)^2}$$

En remplaçant les espérances par les estimations $\hat{\mu}_X = x$, $\hat{\mu}_Y = y$ et les écart-types par les estimations des incertitudes (voir § 1.1) $\Delta x = c\,\hat{\sigma}_X$, $\Delta y = c\,\hat{\sigma}_Y$, $\Delta z = c\,\hat{\sigma}_Z$, on obtient la formule de propagation des incertitudes (formule de Gauss-Laplace)

$$\boxed{\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y\right)^2}}$$

§ 4.4 Le modèle théorique pour une moyenne de mesures

Variables aléatoires

Dans le cas où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont des valeurs moyennes, il faut écrire

$$M(X) = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

$$M(Y) = \frac{1}{k}(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k)$$

$$Z = f(M(X), M(Y))$$

où nous supposons que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ sont indépendantes.

Comme dans le § 1.2, nous ne disposons que d'une seule observation $\overline{x}$ de *M*(*X*) et $\overline{y}$ de *M*(*Y*).

Écarts-types

Dans la formule correspondante du paragraphe 1.2, remplaçons les variables *X*, *Y* par *M*(*X*), *M*(*Y*) respectivement. Nous obtenons

$$\sigma_Z = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial f(\mu_{M(X)}, \mu_{M(Y)})}{\partial x}\sigma_{M(X)}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\mu_{M(X)}, \mu_{M(Y)})}{\partial y}\sigma_{M(Y)}\right)^2\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial x}\sigma_{M(X)}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial y}\sigma_{M(Y)}\right)^2}$$

dans laquelle on a (voir *Statistique II, § 2.4*)

$$\sigma_{M(X)} = S(M(X)) = \frac{S(X)}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{M(Y)} = S(M(Y)) = \frac{S(Y)}{\sqrt{k}} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{k}}$$

Loi de propagation des incertitudes

En multipliant les deux membres par une constante positive c

$$c\,\sigma_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial x}\, c\,\sigma_{M(X)}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\mu_X, \mu_Y)}{\partial y}\, c\,\sigma_{M(Y)}\right)^2}$$

En remplaçant les espérances par les estimations $\hat{\mu}_X = \overline{x}$, $\hat{\mu}_Y = \overline{y}$ et les écart-types par les estimations des incertitudes $\Delta x = c\,\hat{\sigma}_{M(X)}$, $\Delta y = c\,\hat{\sigma}_{M(Y)}$, $\Delta z = c\,\hat{\sigma}_Z$, on obtient la formule de propagation des incertitudes (formule de Gauss-Laplace)

$$\boxed{\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}\, \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}\, \Delta y\right)^2}}$$

Exercices du § 4

Exercice 4-1

Au moyen de simulations, estimez l'incertitude relative $\frac{\Delta z}{|z|}$ sur $z = x\,y$ pour les valeurs numériques $x = 0.3$, $y = 7$, $\frac{\Delta x}{x} = 2\%$, $\frac{\Delta y}{y} = 1\%$.

a) Avec $n = 10\,000$ et $c = 1$; effectuez plusieurs simulations et conservez tous les résultats.

b) Avec $n = 10\,000$ et $c = 3$; effectuez plusieurs simulations et conservez tous les résultats.

c) Comparez a) et b); observez-vous une différence significative ?
L'incertitude est-elle vraiment indépendante de la valeur de c ?

d) Comparez les résultats obtenus en a) et b) avec la formule théorique

$$\frac{\Delta z}{|z|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

Liens

Vers les corrigés des exercices du § 4: Partie théorique
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/corriges/calcul_erreur/4-calcul_erreur-cor.pdf

Vers la page mère: Applications des mathématiques
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/index.html