Collège du Sud
Mathématiques & Physique
Bulle, 2014-2015

Petite balade dans le monde des phénomènes sonores

Florian Charrière

Eugène Pasquier

www.deleze.name

Table des matières

1 Préambule

Les caractéristiques d'un son dépendent de l'instrument, c'est-à-dire du système physique, qui le génère. Un son dit *harmonique* est un son caractérisé par une vibration principale régulière (lame métallique, diapason, monocorde, piano, ...) dont le nombre de vibrations par seconde est indiqué en Herz ($1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$). Ce nombre de vibrations par seconde, appelé fréquence du son, définit sa hauteur. Les trois caractéristiques principales d'un son musical sont sa **hauteur**, son **intensité** et son **timbre**. Dans le présent document, on s'intéressera uniquement à la hauteur du son.

A titre indicatif, l'oreille humaine perçoit les sons du grave à l'aigu pour des fréquences de vibration comprises respectivement entre 20Hz et 20'000Hz. Le la_3 du diapason a une fréquence de 440Hz.

2 Gammes pythagoricienne et de Zarlino

2.1 Fréquence de vibration et longueur de la corde vibrante

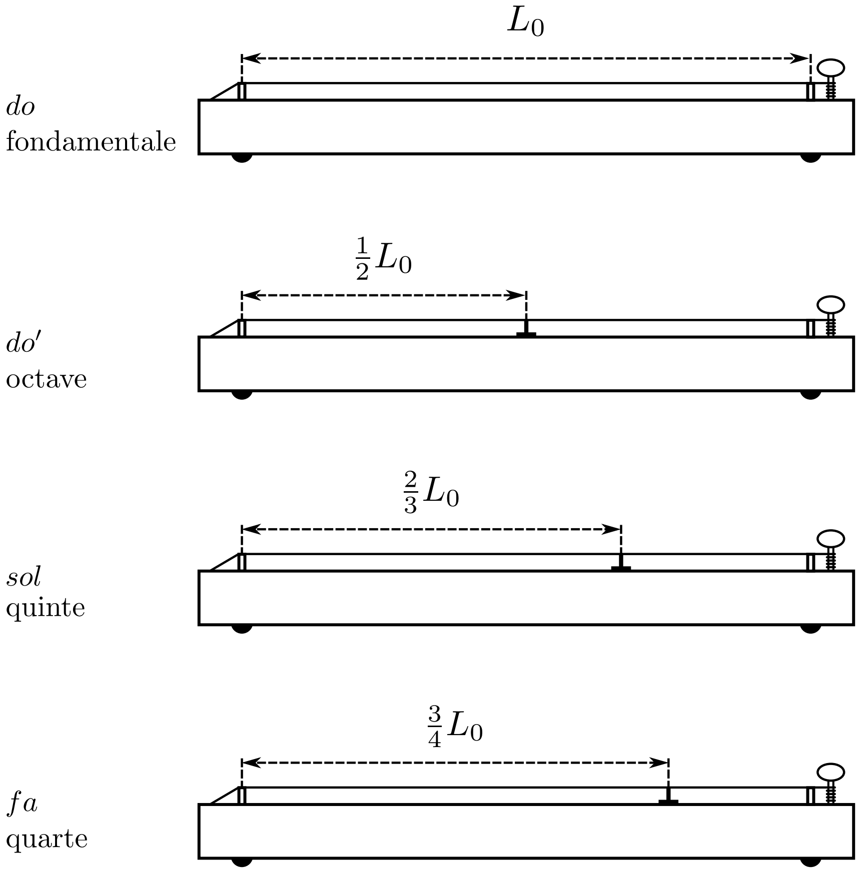
Bien qu'ils ne connaissaient pas encore la relation liant la hauteur d'un son et sa fréquence de vibration, les grecs n'en ont pas moins remarqué la relation numérique existante entre la longueur d'une corde vibrante et les intervalles musicaux. Cette découverte est généralement attribuée à Pythagore.
Soumise à une tension donnée T, une corde de longueur L et de masse linéique μ mise en vibration émet un son d'une hauteur (et donc d'une fréquence) déterminée. Si l'on réduit la partie vibrante de la corde selon certaines proportions particulières, on obtient des sons définissants les intervalles principaux de la gamme diatonique. L'idée avancée par Pythagore est que les intervalles consonants sont ceux déterminés par les rapports les plus simples. On peut établir la relation

$$\nu = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

qui lie la fréquence ν, la tension T, la longueur L et la masse linéique μ.
En posant $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = k$ on obtient la relation $\nu = \frac{k}{L}$ qui montre que la fréquence de vibration est inversement proportionnelle à la longueur de la partie vibrante de la corde.

2.2 Expérience du monocorde

La hauteur du son est déterminée par la longueur de la partie vibrante.



En comparant les longueurs respectives des parties vibrantes, on constate que
– pour augmenter la hauteur d'une octave, il faut multiplier la longueur de la corde par $\frac{1}{2}$,
– pour augmenter la hauteur d'une quinte, il faut multiplier la longueur de la corde par $\frac{2}{3}$,
– pour augmenter la hauteur d'une quarte, il faut multiplier la longueur de la corde par $\frac{3}{4}$.

Il a été vu plus haut (2.1) que la fréquence de vibration est inversement proportionnelle à la longueur de la partie vibrante de la corde $\nu = \frac{k}{L}$. En terme de fréquence, les constatations précédentes impliquent ainsi que
– pour augmenter la hauteur d'une octave, il faut multiplier la fréquence de vibration par 2,
– pour augmenter la hauteur d'une quinte, il faut multiplier la fréquence de vibration par $\frac{3}{2}$,
– pour augmenter la hauteur d'une quarte, il faut multiplier la fréquence de vibration par $\frac{4}{3}$.

3 Gamme de Pythagore

3.1 Règle de construction dite des quintes

Pour obtenir l'octave supérieure d'une note de base, on double la fréquence de base, tandis que pour obtenir la quinte supérieure, on multiplie la fréquence de base par $\frac{3}{2}$. Réciproquement, on multiplie la fréquence de base par $\frac{1}{2}$ pour obtenir l'octave inférieure et on multiplie la fréquence de base par $\frac{2}{3}$ pour obtenir la quinte inférieure.

Partons d'un *do* :

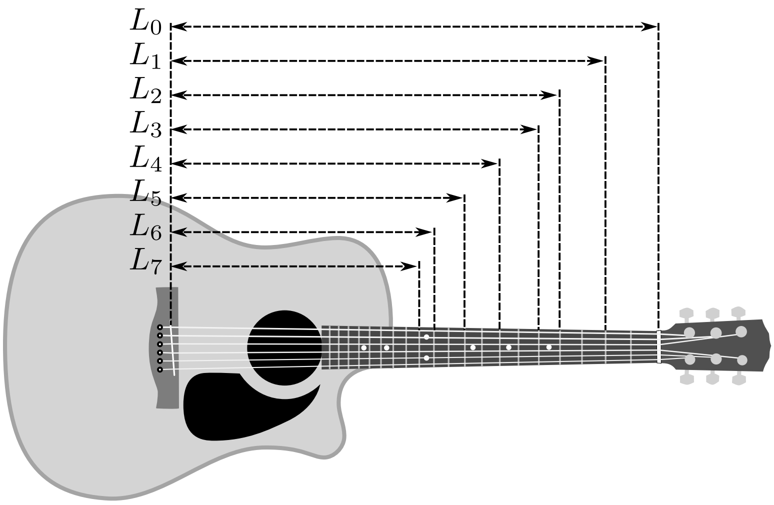
$$\begin{aligned}
\nu_{do} &= \nu_0 \\
\nu_{sol} &= \frac{3}{2}\,\nu_0 \\
\nu_{ré} &= \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\;\nu_0\right)\frac{1}{2} = \frac{9}{8}\,\nu_0 \\
& \text{On multiplie par } \tfrac{1}{2} \text{ pour ramener le } \textit{ré} \text{ à l'intérieur de l'octave.} \\
& \text{Le rapport de fréquences de deux notes séparées par un ton entier est ainsi de } \tfrac{9}{8} \\
\nu_{la} &= \frac{3}{2}\left(\frac{9}{8}\,\nu_0\right) = \frac{27}{16}\,\nu_0 \\
\nu_{mi} &= \frac{3}{2}\left(\frac{27}{16}\,\nu_0\right)\frac{1}{2} = \frac{81}{64}\,\nu_0 \qquad \left(\frac{81}{64} \approx \frac{5}{4}\right) \\
\nu_{si} &= \frac{3}{2}\left(\frac{81}{64}\,\nu_0\right) = \frac{243}{128}\,\nu_0 \\
\nu_{fa} &= \frac{3}{2}\,(2\,\nu_0) = \frac{4}{3}\,\nu_0
\end{aligned}$$

Résumé des rapports de fréquence entre la note de base et les autres notes de la gamme

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
ν_0	$\frac{9}{8}\,\nu_0$	$\frac{81}{64}\,\nu_0$	$\frac{4}{3}\,\nu_0$	$\frac{3}{2}\,\nu_0$	$\frac{27}{16}\,\nu_0$	$\frac{243}{128}\,\nu_0$	$2\,\nu_0$

3.2 Vérification des rapports de fréquences sur une guitare

La fréquence de vibration est inversement proportionnelle à la longueur de la partie vibrante de la corde $\nu = \frac{k}{L}$ (pt. 2.1). De fait si $\frac{\nu_{ré}}{\nu_{do}} = \frac{9}{8}$, le rapport des longueurs de cordes pour les mêmes notes doit être inverse $\frac{L_{ré}}{L_{do}} = \frac{8}{9}$ ou alors de manière équivalente $\frac{L_{do}}{L_{ré}} = \frac{9}{8}$. Afin de vérifier sur un instrument réel les rapports de fréquence de la gamme de Pythagore, on se propose de mesurer les positions des frettes d'une guitare, permettant au joueur de faire varier la longueur de la corde vibrante suivant la position de ses doigts. La longueur à vide de la corde est désignée par L_0 et les longueurs suivantes respectant les intervalles de la gamme de *do* majeur par L_1, L_2, …



L_0 [cm]	L_1 [cm]	L_2 [cm]	L_3 [cm]	L_4 [cm]	L_5 [cm]	L_6 [cm]	L_7 [cm]
-	$\frac{L_0}{L_1}$	$\frac{L_0}{L_2}$	$\frac{L_0}{L_3}$	$\frac{L_0}{L_4}$	$\frac{L_0}{L_5}$	$\frac{L_0}{L_6}$	$\frac{L_0}{L_7}$
-							
-	$\frac{9}{8}$ $= 1.125$	$\frac{81}{64}$ ≈ 1.266	$\frac{4}{3}$ ≈ 1.333	$\frac{3}{2}$ $= 1.500$	$\frac{27}{16}$ ≈ 1.688	$\frac{243}{128}$ ≈ 1.898	2

3.3 Problèmes théoriques

Les rapports des fréquences des deux demi-tons $mi - fa$ et $si - do$ sont égaux. En effet

$$\frac{\nu_{fa}}{\nu_{mi}} = \frac{\frac{4}{3}\nu_0}{\frac{81}{64}\nu_0} = \frac{256}{243} \quad \text{et} \quad \frac{\nu_{do}}{\nu_{si}} = \frac{2\nu_0}{\frac{243}{128}\nu_0} = \frac{256}{243}.$$

Cependant, une augmentation successive de la fréquence de deux demi-tons n'est pas égale à un ton puisque

$$\frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243} \approx 1.110 \quad \text{n'est pas égal à} \quad \frac{9}{8} = 1.125$$

De plus, si on utilise la règle des quintes pour calculer les fréquences $\nu_{sol\flat}$ et $\nu_{fa\#}$, supposément identiques, on obtient

$$\begin{aligned} \nu_{sol\flat} &= 2\,\nu_0 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{2^{10}}{3^6}\,\nu_0 \approx 1.405\,\nu_0 \\ \nu_{fa\#} &= \nu_0 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3^6}{2^9}\,\nu_0 \approx 1.424\,\nu_0 \end{aligned}$$

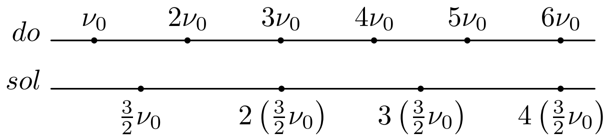
On constate que $\nu_{sol\flat} \neq \nu_{fa\#}$. Une telle gamme ne permet pas de jouer dans plusieurs tonalités différentes.

4 La gamme de Zarlino

4.1 Construction sur les harmoniques

La gamme de Zarlino est basée sur les fréquences harmoniques d'un son donné. L'étude des cordes vibrantes montre qu'un son musical de fréquence ν_0 est accompagné de partiels harmoniques de fréquences $2\nu_0$, $3\nu_0$, $4\nu_0$, ... Cette gamme dite des physiciens a deux caractéristiques ; d'une part elle est naturelle, car elle se sert des harmoniques, d'autre part elle est arbitraire, car on divise les différentes fréquences harmoniques par des nombre entiers pour obtenir la fréquence de la note définie dans l'intervalle $[\nu_0; 2\nu_0]$.

Considérons les harmoniques des notes de base *do* et *sol*.

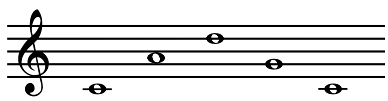


Les fréquences de deux notes séparées par une quinte sont dans le rapport $\frac{3}{2}$; il en est de même de leurs harmoniques. Ainsi le $2^{\text{ème}}$ harmonique de *sol* coïncide avec le $3^{\text{ème}}$ de *do*, le $4^{\text{ème}}$ harmonique de *sol* avec le $6^{\text{ème}}$ de *do*. De la même façon, on peut vérifier que le $3^{\text{ème}}$ harmonique de fa a la même fréquence que le $4^{\text{ème}}$ harmonique de *do*. De plus, en supposant que la tierce majeure $do - mi$ a un rapport de fréquences $\frac{5}{4}$, on constate que le $4^{\text{ème}}$ harmonique de *mi* est égale au $5^{\text{ème}}$ harmonique de *do*.

La valeur $\frac{5}{4}$ pour la tierce majeure est déjà utilisée par Ptolémée. Elle remplace la valeur $\frac{81}{64}$ de la gamme pythagoricienne. On peut remarquer que les fréquences des notes $do - mi - sol$ forment une suite arithmétique dont les termes 1, $\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{2}$ sont proportionnels aux entiers 4, 5 et 6. Leurs inverses $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{6}$ forment alors une suite harmonique, tout comme les longueurs des parties vibrantes des cordes. Une telle relation entre suite arithmétique et harmonique est générale. A la suite arithmétique 1, 2, 3, 4, 5, ... correspond la suite harmonique 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ...

4.2 Problèmes théoriques

Là encore des difficultés surgissent. Les rapports des tierces mineures $ré - fa$ et $mi - sol$ ne sont pas égaux. Il en est de même du rapport des secondes majeures $do - ré$ et $ré - mi$. Ainsi des intervalles portants le même nom ne sont pas égaux. Considérons par ailleurs les notes de la mélodie reproduite ci-dessous.

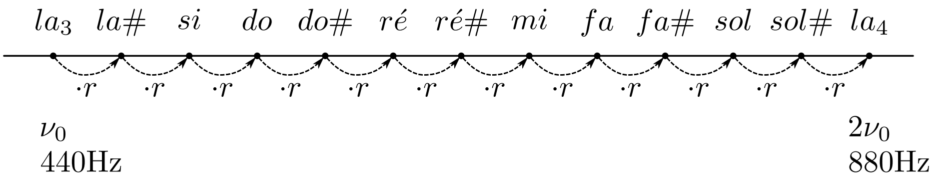


En y appliquant les rapports d'intervalles du système de Zarlino, on obtient successivement $\nu_{la} = \frac{5}{3}\nu_0$, $\nu_{ré} = \frac{4}{3}\left(\frac{5}{3}\,\nu_0\right) = \frac{20}{9}\nu_0$, $\nu_{sol} = \frac{2}{3}\left(\frac{20}{9}\,\nu_0\right) = \frac{40}{27}\nu_0$, puis $\nu_0 = \nu_{do} = \frac{2}{3}\left(\frac{40}{27}\,\nu_0\right) = \frac{80}{81}\nu_0$. La dernière égalité est contradictoire. Cette définition des intervalles idéaux basée sur des rapports de nombres entiers ne permet pas de définir un système totalement cohérent.

5 La gamme tempérée

5.1 Construction selon une progression géométrique

La solution adoptée pour la gamme dite tempérée définit la fréquence du son mathématiquement, en admettant que les fréquences sont réparties selon une suite géométrique. La gamme tempérée réuni les avantages d'être acceptée par l'oreille humaine et de permettre de jouer dans toutes les tonalités.



On détermine la raison r de la suite géométrique

$$\begin{aligned} 880\text{Hz} &= 440\text{Hz} \cdot r^{12} \\ 2 &= r^{12} \\ r &= \sqrt[12]{2} \approx 1.05946 \end{aligned}$$

5.2 Calculs et vérification expérimentale via un générateur de fréquences

Le tableau ci-dessous peut maintenant être complété. Les fréquences théoriques ν_{th} sont calculées selon la progression géométrique de raison $r = 1.05946$. Un générateur de fréquences relié à un système d'amplification (voir Annexe B.1) est ensuite utilisé pour ajuster à l'oreille les hauteurs des notes ; une fois la bonne hauteur atteinte, la valeur de la fréquence expérimentale ν_{exp} est lue sur le générateur de fréquence.

note	la_3	si	do	$ré$	mi	fa	sol	la_4
ν_{th} [Hz]								
ν_{exp} [Hz]								

5.3 Comparaison entre les gammes pythagoricienne et tempérée

Ci-dessous sont comparées les gammes pythagoricienne et tempérée en terme de facteurs multiplicatifs de la fréquence de base ν_0

do	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*
gamme pythagoricienne (naturelle)							
ν_0	$\frac{9}{8}\,\nu_0$	$\frac{81}{64}\,\nu_0$	$\frac{4}{3}\,\nu_0$	$\frac{3}{2}\,\nu_0$	$\frac{27}{16}\,\nu_0$	$\frac{243}{128}\,\nu_0$	$2\,\nu_0$
ν_0	$= 1.125\,\nu_0$	$\approx 1.266\,\nu_0$	$\approx 1.333\,\nu_0$	$= 1.500\,\nu_0$	$\approx 1.688\,\nu_0$	$\approx 1.898\,\nu_0$	
gamme tempérée							
ν_0	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^2\,\nu_0$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^3\,\nu_0$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^4\,\nu_0$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^5\,\nu_0$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^6\,\nu_0$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^7\,\nu_0$	$2\,\nu_0$
ν_0	$\approx 1.122\,\nu_0$	$\approx 1.260\,\nu_0$	$\approx 1.335\,\nu_0$	$\approx 1.498\,\nu_0$	$\approx 1.682\,\nu_0$	$\approx 1.888\,\nu_0$	

5.4 Position des frettes sur une guitare

On définit ΔL_n, l'espace séparant deux frettes consécutives correspondant à des longueurs de cordes vibrantes L_n et L_{n-1} ; $\Delta L_{n-1} = L_{n-1} - L_n$, $n \geq 1$.

De la relation $L = \frac{k}{\nu}$ on déduit que $L_n = \frac{k}{\nu_n}$ où ν_n est la fréquence de la note correspondant à la longueur L_n. Les demi-tons de la gamme chromatique étant définis par une suite géométrique de raison $r =^{12} \sqrt{2}$, les longueurs L_n forme également une suite géométrique, mais de raison $r^* = \frac{1}{r}$. En effet

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{\frac{k}{\nu_{n+1}}}{\frac{k}{\nu_n}} = \frac{\nu_n}{\nu_{n+1}} = \frac{1}{r}$$

De même, la suite ΔL_n des espaces séparant les frettes est en progression géométrique de raison $r* = \frac{1}{r}$ également. En effet

$$\frac{\Delta L_{n+1}}{\Delta L_n} = \frac{L_n - L_{n+1}}{L_{n-1} - L_n} = \frac{\frac{k}{\nu_n} - \frac{k}{\nu_{n+1}}}{\frac{k}{\nu_{n-1}} - \frac{k}{\nu_n}} = \frac{\frac{k}{\nu_n}\left(1 - \frac{1}{r}\right)}{\frac{k}{\nu_{n-1}}\left(1 - \frac{1}{r}\right)} = \frac{1}{r}$$

Pour vérifier la relation, on complètera le tableau ci-dessous.

L_0 [cm]	L_1 [cm]	L_2 [cm]	L_3 [cm]	L_4 [cm]	L_5 [cm]	L_6 [cm]	L_7 [cm]
	ΔL_1	ΔL_2	ΔL_3	ΔL_4	ΔL_5	ΔL_6	ΔL_7
-							
-	-	$\frac{\Delta L_2}{\Delta L_1}$	$\frac{\Delta L_3}{\Delta L_2}$	$\frac{\Delta L_4}{\Delta L_3}$	$\frac{\Delta L_5}{\Delta L_4}$	$\frac{\Delta L_6}{\Delta L_5}$	$\frac{\Delta L_7}{\Delta L_6}$
-	-						

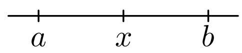
A Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique dans la gamme pythagoricienne

A.1 Définitions

Soient a et b deux nombres positifs, $a < b$.

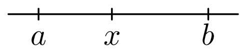
a) x est la **moyenne arithmétique** de a et b si

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{a}{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{a+b}{2} = A(a,b)$$



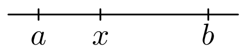
b) x est la **moyenne géométrique** de a et b si

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{a}{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt{ab} = G(a,b)$$



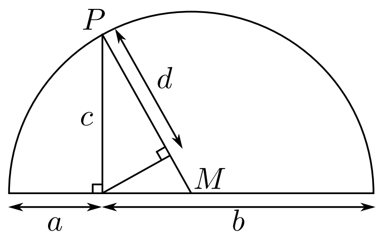
c) x est la **moyenne harmonique** de a et b si

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{a}{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{2ab}{a+b} = H(a,b)$$



A.2 Construction géométrique

$$\begin{aligned} PM &= A(a,b) \\ c &= G(a,b) \\ d &= H(a,b) \end{aligned}$$



On peut aisément montrer la propriété suivante

$$\frac{a}{A(a,b)} = \frac{H(a,b)}{b}$$

appelée proportion musicale pour la raison que voici. Supposons quatre cordes identiques de longueur b. Considérons les parties de corde de longueur égale à $a = 6u$, $b = 12u$, $c = H(a,b) = 8u$ et $d = A(a,b) = 9u$. De l'expérience du monocorde, on sait que, frappées ensemble, les cordes

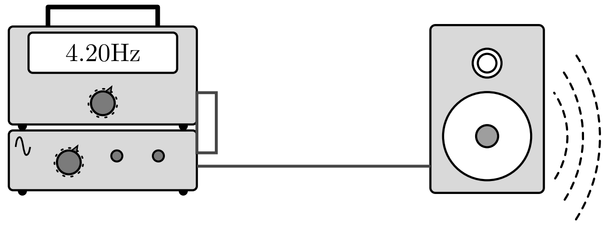
– a et b sont dans un rapport d'octave,
– b et c sont dans un rapport de quinte,
– b et d sont dans un rapport de quarte.

De plus, la suite $a - d - c - b$ donne une cadence.

B Dispositifs expérimentaux

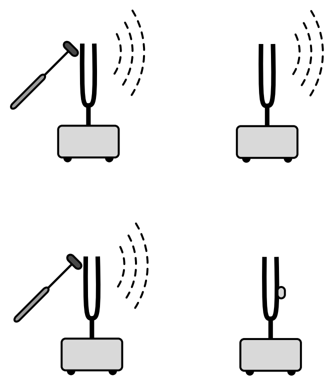
B.1 Générateur de fréquences, analyseur de fréquence et haut-parleur

Le haut parleur et l'analyseur de fréquences sont branchés sur la sortie du générateur. Ce dispositif permet d'illustrer la relation entre la valeur de la fréquence de l'onde et la hauteur de la note perçue. Il permet également de mesurer la fréquence d'un instrument en ajustant *à l'oreille* la fréquence du générateur sur celle jouée par l'instrument.



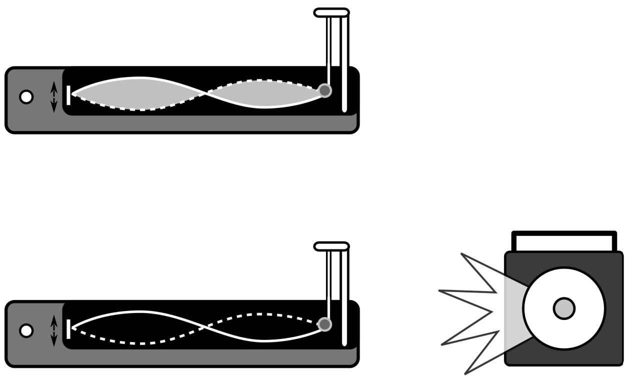
B.2 Diapasons et caisses de résonance

Une paire de diapason identiques (f_{la} = 440Hz) permet d'illustrer le phénomène de résonance. Lorsqu'on fait sonner un des deux diapasons avec le marteau, l'autre se met à sonner également, leurs fréquences de résonance étant identiques (on stoppe le premier diapason avec la main pour bien mettre en valeur le son produit par le deuxième). Une petite masse mobile peut ensuite être fixée sur un des deux diapasons, modifiant ainsi ses fréquences de résonance, si bien que la mise en résonance d'un diapason par l'autre n'est plus possible.



B.3 Corde vibrante et mode de vibration

Une corde est fixée à une extrémité sur un agitateur circulaire. L'autre extrémité passe par une poulie avant d'être attaché à une tige, permettant ainsi d'ajuster la tension dans la corde. Différents modes de résonance de la corde peuvent ainsi être créés, permettant de présenter la notion d'onde stationnaire, de ventre (lieu d'amplitude d'oscillation maximale) et de noeud (lieu d'amplitude d'oscillation nulle). L'utilisation combinée avec un stroboscope réglé sur la fréquence de l'agitateur permet de *figer* le mouvement de la corde pour l'oeil de l'observateur.



B.4 Générateur de fréquences, analyseur de fréquence et agitateur vertical

L'agitateur vertical, relié au générateur de fréquences, est utilisé pour faire osciller un système masse-ressort suspendu verticalement à une tige métallique (voir schéma ci-dessous). Lorsque la fréquence de l'agitateur correspond à celle d'un des modes de vibration du système masse-ressort, l'amplitude d'oscillation de la masse augmente considérablement. On peut avec ce dispositif illustrer les différents modes de résonance d'un système à une seule masse (ressort-masse-ressort), ou à deux masses (ressort-masse-ressort-masse-ressort) comme illustré sur le schéma. La deuxième configuration permet notamment de générer des modes de vibrations où les deux masses sont soit en phase, soit en opposition de phase.