Mathématiques du cadran solaire vertical

Notations

ϕ = latitude du lieu

A = azimut de la paroi = angle entre le nord géographique et le plan qui porte le cadran

δ = déclinaison du soleil

C = point du cadran qui est commun à toutes les lignes-horaires (appelé “centre”)

G = point du cadran où se trouve le “pied du gnomon”

S = “sommet du style” qui est un point hors du cadran situé à la verticale de G

Position du style

Dans la construction du cadran, le nom “style” désigne généralement le triangle CGS, rectangle en G. Cependant, le style “proprement dit” est le vecteur $\overrightarrow{SC}$ qui pointe vers le nord céleste. Quant au vecteur $\overrightarrow{GS}$ qui est normal au plan du cadran, il est dénommé “gnomon”.

Projection orthogonale du gnomon $\overrightarrow{GS}$ sur le plan du cadran

Les lignes horaire sont des droites qui concourent en un même point C(0,0) que nous prenons comme origine du repère du plan du cadran. L’axe horizontal indique la direction de la paroi. Pour A=90°, il pointe vers l’est. L’axe vertical est dirigé vers le zénith. C’est dans ce repère qu’est exprimée la graduation du cadran.

Le vecteur orienté vers le pied G du style (c’est-à-dire le vecteur directeur de la projection orthogonale du sommet S du style sur le plan du cadran) est

$$\overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} -\cos(A) \\ -\tan(\phi) \end{pmatrix} \text{ si } \sin(A) > 0$$

$$\overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} \cos(A) \\ \tan(\phi) \end{pmatrix} \text{ si } \sin(A) < 0$$

La distance CG est une affaire de commodité.

L’extrémité S du style requiert toute notre attention, car c’est le point dont on étudie la position de l’ombre (c’est-à-dire la projection, parallèlement aux rayons du soleil, sur le plan du cadran).

Angle d’élévation du style $\overrightarrow{CS}$ sur le cadran

L’angle entre $\overrightarrow{CS}$ et le plan du cadran est

$$(\text{angle SCG}) = \frac{\pi}{2} - \arccos(|\cos(\phi) \sin(A)|)$$

Graduation pour le temps solaire moyen

Formule pour graduer le cadran vertical

Pour les cadrans solaires donnant le temps solaire moyen, le mouvement du soleil est supposé circulaire uniforme. Le paramètre t , appelé angle horaire, est

t = angle entre le méridien du lieu et le méridien du soleil.

Pour traduire l'angle horaire t [en radians] en heures de temps solaire moyen h [en heures], on pose

$$t = \frac{h - 12}{12} \pi$$

Après la projection du style sur une paroi verticale d'azimut A en un lieu de latitude ϕ , voici la situation :

dans le repère orthonormé direct (facade, zenith), après avoir pris comme centre $C(0,0)$, un vecteur directeur de la droite horaire de l'ombre du style est

$$\begin{pmatrix} \sin(t) \cos(\phi) \\ \sin(t) \sin(\phi) \cos(A) - \cos(t) \sin(A) \end{pmatrix}$$

Heures de visibilité du soleil

Le soleil est visible si

$$\sin(A) (\cos(\phi) \sin(\delta) + \cos(t) \cos(\delta) \sin(\phi)) - \cos(A) \cos(\delta) \sin(t) > 0$$

Pratiquement, le test est effectué pour le jour du solstice d'été avec $\delta = \delta_{\max} = \frac{23.4573}{180} \pi$

Graduation pour l'heure légale

L'heure légale est celle du fuseau horaire du lieu :

UTC+1 correspond à la longitude 15° E

UTC+2 correspond à la longitude 30° E

Il faut apporter une correction $\Delta t =$ (" **correction de longitude** " en heures) qui est égale à la différence entre $\lambda =$ (longitude lieu) et $\lambda_{\text{ref}} =$ (longitude de référence du fuseau horaire de l'heure légale) :

$$\Delta t = (\lambda - \lambda_{\text{ref}}) \frac{12}{180}$$

Par exemple, pour la longitude 7° 3' 34 " E, dans le fuseau horaire à l'heure d'été UTC+2, la correction de longitude en degrés (et fraction décimale du degré) vaut

$$(7 + 3/60 + 34/3600)^\circ - 30^\circ = -22.9406^\circ$$

Sachant que 15° de différence de longitude correspondent à 60 minutes de temps, nous obtenons, dans notre exemple, une différence temporelle de -91.7622 minutes.

Graduation pour le temps solaire vrai

Il faut apporter une correction dénommée " **équation du temps** " qui varie au fil de l'année et dont les causes sont

- la trajectoire de la terre autour du soleil n'est pas un cercle, mais une ellipse ; c'est pourquoi le mouvement apparent du soleil dans le ciel n'est pas uniforme ;
- l'attraction exercée par la lune modifie quelque peu la direction de l'axe de la terre.

La table ci-dessous donne la correction, en minutes (et fractions décimales de la minute) à apporter pour chaque jour de l'année. Les numéros des colonnes, de 1 à 12, indiquent les mois. Les numéros de lignes, de 1 à 31, indiquent le quantième.

Le signe utilisé ici est celui en vigueur dans les pays anglo-saxons (et qui est contraire à la convention de signe en France) : pour obtenir l'heure du soleil vrai, il faut, à l'heure du soleil moyen, ajouter l'équation du temps.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-3.45	-13.62	-12.45	-3.95	2.93	2.32	-3.68	-6.25	-0.03	10.27	16.37	11.
2	-3.92	-13.73	-12.25	-3.67	3.05	2.17	-3.87	-6.18	0.28	10.58	16.4	10.62
3	-4.38	-13.85	-12.03	-3.37	3.15	2.	-4.07	-6.12	0.6	10.9	16.4	10.23
4	-4.83	-13.97	-11.82	-3.07	3.25	1.83	-4.25	-6.03	0.93	11.2	16.4	9.83
5	-5.28	-14.05	-11.6	-2.78	3.35	1.67	-4.43	-5.93	1.27	11.5	16.37	9.43
6	-5.73	-14.12	-11.37	-2.5	3.43	1.48	-4.6	-5.83	1.6	11.8	16.33	9.02
7	-6.17	-14.18	-11.13	-2.22	3.5	1.3	-4.77	-5.72	1.93	12.1	16.28	8.58
8	-6.6	-14.23	-10.9	-1.93	3.57	1.12	-4.93	-5.6	2.28	12.38	16.23	8.15
9	-7.03	-14.27	-10.65	-1.65	3.62	0.92	-5.08	-5.47	2.62	12.65	16.15	7.7
10	-7.43	-14.3	-10.38	-1.38	3.67	0.72	-5.22	-5.32	2.97	12.93	16.07	7.25
11	-7.83	-14.3	-10.13	-1.12	3.7	0.52	-5.35	-5.17	3.32	13.18	15.97	6.8
12	-8.23	-14.3	-9.87	-0.85	3.72	0.32	-5.48	-5.	3.67	13.45	15.85	6.33
13	-8.62	-14.28	-9.6	-0.58	3.73	0.12	-5.62	-4.83	4.02	13.68	15.72	5.87
14	-8.98	-14.27	-9.32	-0.33	3.73	0.08	-5.73	-4.65	4.38	13.93	15.57	5.4
15	-9.35	-14.22	-9.03	0.08	3.73	-0.3	-5.83	-4.45	4.73	14.15	15.4	4.92
16	-9.7	-14.17	-8.75	0.15	3.72	-0.52	-5.93	-4.25	5.08	14.37	15.23	4.43
17	-10.03	-14.12	-8.47	0.38	3.7	-0.73	-6.02	-4.05	5.45	14.58	15.05	3.95
18	-10.37	-14.03	-8.17	0.62	3.67	-0.95	-6.1	-3.83	5.8	14.78	14.83	3.45
19	-10.68	-13.95	-7.88	0.85	3.63	-1.17	-6.18	-3.6	6.15	14.97	14.62	2.97
20	-10.98	-13.85	-7.58	1.07	3.58	-1.38	-6.25	-3.37	6.52	15.15	14.4	2.47
21	-11.27	-13.73	-7.28	1.27	3.52	-1.6	-6.3	-3.13	6.87	15.32	14.15	1.97
22	-11.55	-13.62	-6.98	1.47	3.45	-1.82	-6.33	-2.88	7.22	15.47	13.88	1.47
23	-11.82	-13.48	-6.68	1.67	3.38	-2.03	-6.37	-2.63	7.57	15.62	13.62	0.97
24	-12.07	-13.35	-6.38	1.85	3.3	-2.25	-6.4	-2.37	7.92	15.75	13.33	0.47
25	-12.3	-13.2	-6.08	2.03	3.2	-2.47	-6.42	-2.1	8.25	15.87	13.03	0.03
26	-12.53	-13.03	-5.77	2.2	3.1	-2.67	-6.42	-1.82	8.6	15.98	12.73	-0.53
27	-12.75	-12.87	-5.47	2.37	2.98	-2.88	-6.42	-1.53	8.93	16.08	12.4	-1.02
28	-12.95	-12.68	-5.17	2.52	2.87	-3.08	-6.4	-1.25	9.27	16.17	12.07	-1.52
29	-13.13	-12.57	-4.53	2.67	2.73	-3.3	-6.38	-0.95	9.6	16.23	11.73	-2.
30	-13.3		-4.23	2.8	2.6	-3.5	-6.35	-0.65	9.93	16.28	11.37	-2.48
31	-13.47		-4.25		2.47		-6.3	-0.35		16.33		-2.97

Déterminer l'orientation de la table du cadran vertical

Nous nous proposons de calculer l'azimut de la table à partir de l'heure du passage du soleil dans le plan de la table du cadran, c'est-à-dire à l'un instant t_{leg} où le soleil, par des rayons rasants, commence à éclairer ou cesse d'éclairer la table.

Déclinaison du soleil

La déclinaison du soleil dépend du jour J de l'année. Par exemple, pour le 11 septembre, $J = 254$. La déclinaison du soleil est calculée avec la méthode de Spencer [“Fourier series representation of the position of the Sun”, J.W. Spencer, Search Vol 2 (5) 172, 1971] :

$$\gamma = 2 * \pi / 365 * (J - 1)$$

$$\begin{aligned} \delta = &.006918 - .399912 * \cos(\gamma) + .070257 * \sin(\gamma) - .006758 * \cos(2 * \gamma) \\ &+ .000907 * \sin(2 * \gamma) - .002697 * \cos(3 * \gamma) + .00148 * \sin(3 * \gamma) \end{aligned}$$

Azimut de la table du cadran

À l'instant où le soleil passe dans le plan de la table du cadran, la composante verticale de la projection est nulle. En désignant par t cet instant traduit en heure du "soleil vrai", on peut calculer l'azimut A en résolvant l'équation

$$\sin(A)(\cos(\phi) \sin(\delta) + \cos(t) \cos(\delta) \sin(\phi)) - \cos(A) \cos(\delta) \sin(t) = 0$$

Les situations où le cadran est très mal exposé au soleil sont exclues, en particulier lorsque la base de la paroi va du Sud au Nord. Il est ainsi possible de diviser l'équation par $\sin(A)$ qui n'est pas proche de zéro :

$$\cos(\phi) \sin(\delta) + \cos(t) \cos(\delta) \sin(\phi) = \cot(A) \cos(\delta) \sin(t)$$

$$A = \operatorname{arccot} \left(\frac{\cos(\phi) \sin(\delta) + \cos(t) \cos(\delta) \sin(\phi)}{\cos(\delta) \sin(t)} \right)$$

Afin d'obtenir la solution $A \in] 0, 180 ^\circ [$,

$$\text{if}(A < 0) \quad A = A + \pi$$

$A \in]0, 90^\circ]$ indique une orientation de la paroi face à l'Est.

$A \in [90^\circ, 180^\circ[$ indique une orientation face à l'Ouest.

Marcel Délèze

Établissement des formules du cadran solaire vertical

www.deleze.name/marcel/physique/cadran-solaires/vertical-mural/maths/proj-vert.pdf

Confectionnez votre cadran solaire

www.deleze.name/marcel/physique/cadran-solaires