

Mathématiques du cadran solaire vertical à orienter

Cas particulier de la paroi exposée plein sud : la paroi est orientée Est-Ouest et son azimut est $A = 90^\circ$

Notations

ϕ = latitude du lieu
 δ = déclinaison du soleil

Position du style

Projection orthogonale du style sur le plan du cadran

Les lignes horaires sont des droites qui concourent en un même point $C(0,0)$ que nous prenons comme origine du repère du plan du cadran. L'axe horizontal indique la direction de la paroi. Pour $A=90^\circ$, il pointe vers l'est. L'axe vertical est dirigé vers le zénith. C'est dans ce repère qu'est exprimée la graduation du cadran.

Le vecteur orienté vers le pied G du style (c'est-à-dire le vecteur directeur de la projection orthogonale du sommet S du style sur le plan du cadran) est

$$\vec{CG} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tan(\phi) \end{pmatrix}$$

La distance CG est une affaire de commodité.

Parce que le vecteur \vec{GS} est orthogonal au cadran, il est aussi appelé "gnomon". L'extrémité S du style requiert toute notre attention, car c'est le point dont on étudie la position de l'ombre (c'est-à-dire la projection, parallèlement aux rayons du soleil, sur le plan du cadran).

Angle d'élévation du style sur le cadran

Dans la construction du cadran, le nom "style" désigne généralement le triangle CGS , rectangle en G . Cependant, le style "proprement dit" est le vecteur \vec{SC} qui pointe vers le nord céleste. L'angle entre \vec{CS} et le plan du cadran est

$$(\text{angle } SCG) = \frac{\pi}{2} - \phi$$

Graduation pour le temps solaire moyen

Formule pour graduer le cadran vertical

Pour les cadrans solaires donnant le temps solaire moyen, le mouvement du soleil est supposé circulaire uniforme. Le paramètre t , appelé angle horaire, est

t = angle entre le méridien du lieu et le méridien du soleil.

Pour traduire l'angle horaire t [en radians] en heures de temps solaire moyen h [en heures], on pose

$$t = \frac{h - 12}{12} \pi$$

Après la projection du style sur une paroi verticale d'azimut A en un lieu de latitude ϕ , voici la situation :

dans le repère orthonormé direct (facade, zenith), après avoir pris comme centre $C(0,0)$, un vecteur directeur de la droite horaire de l'ombre du style est

$$\begin{pmatrix} \sin(t) \cos(\phi) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$

Heures de visibilité du soleil

Le soleil est visible si

$$\cos(\phi) \sin(\delta) + \cos(t) \cos(\delta) \sin(\phi) > 0$$

Pratiquement, le test est effectué pour le jour du solstice d'été avec $\delta = \delta_{\max} = \frac{23.4573}{180} \pi$

Graduation pour l'heure légale

Il faut apporter une correction $\Delta t =$ (" **correction de longitude**" en heures) qui est égale à la différence entre $\lambda =$ (longitude lieu) et $\lambda_{\text{ref}} =$ (longitude de référence du fuseau horaire de l'heure légale) :

$$\Delta t = (\lambda - \lambda_{\text{ref}}) \frac{12}{180}$$

Graduation pour le temps solaire vrai

Il faut apporter une correction dénommée " **équation du temps**" qui varie au fil de l'année.

La table ci-dessous donne la correction, en minutes (et fractions décimales de la minute) à apporter pour chaque jour de l'année. Les numéros des colonnes, de 1 à 12, indiquent les mois. Les numéros de lignes, de 1 à 31, indiquent le quantième.

Le signe utilisé ici est celui en vigueur dans les pays anglo-saxons (et qui est contraire à la convention de signe en France) : pour obtenir l'heure du soleil vrai, il faut, à l'heure du soleil moyen, ajouter l'équation du temps.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-3.45	-13.62	-12.45	-3.95	2.93	2.32	-3.68	-6.25	-0.03	10.27	16.37	11.
2	-3.92	-13.73	-12.25	-3.67	3.05	2.17	-3.87	-6.18	0.28	10.58	16.4	10.62
3	-4.38	-13.85	-12.03	-3.37	3.15	2.	-4.07	-6.12	0.6	10.9	16.4	10.23
4	-4.83	-13.97	-11.82	-3.07	3.25	1.83	-4.25	-6.03	0.93	11.2	16.4	9.83
5	-5.28	-14.05	-11.6	-2.78	3.35	1.67	-4.43	-5.93	1.27	11.5	16.37	9.43
6	-5.73	-14.12	-11.37	-2.5	3.43	1.48	-4.6	-5.83	1.6	11.8	16.33	9.02
7	-6.17	-14.18	-11.13	-2.22	3.5	1.3	-4.77	-5.72	1.93	12.1	16.28	8.58
8	-6.6	-14.23	-10.9	-1.93	3.57	1.12	-4.93	-5.6	2.28	12.38	16.23	8.15
9	-7.03	-14.27	-10.65	-1.65	3.62	0.92	-5.08	-5.47	2.62	12.65	16.15	7.7
10	-7.43	-14.3	-10.38	-1.38	3.67	0.72	-5.22	-5.32	2.97	12.93	16.07	7.25
11	-7.83	-14.3	-10.13	-1.12	3.7	0.52	-5.35	-5.17	3.32	13.18	15.97	6.8
12	-8.23	-14.3	-9.87	-0.85	3.72	0.32	-5.48	-5.	3.67	13.45	15.85	6.33
13	-8.62	-14.28	-9.6	-0.58	3.73	0.12	-5.62	-4.83	4.02	13.68	15.72	5.87
14	-8.98	-14.27	-9.32	-0.33	3.73	0.08	-5.73	-4.65	4.38	13.93	15.57	5.4
15	-9.35	-14.22	-9.03	0.08	3.73	-0.3	-5.83	-4.45	4.73	14.15	15.4	4.92
16	-9.7	-14.17	-8.75	0.15	3.72	-0.52	-5.93	-4.25	5.08	14.37	15.23	4.43
17	-10.03	-14.12	-8.47	0.38	3.7	-0.73	-6.02	-4.05	5.45	14.58	15.05	3.95
18	-10.37	-14.03	-8.17	0.62	3.67	-0.95	-6.1	-3.83	5.8	14.78	14.83	3.45
19	-10.68	-13.95	-7.88	0.85	3.63	-1.17	-6.18	-3.6	6.15	14.97	14.62	2.97
20	-10.98	-13.85	-7.58	1.07	3.58	-1.38	-6.25	-3.37	6.52	15.15	14.4	2.47
21	-11.27	-13.73	-7.28	1.27	3.52	-1.6	-6.3	-3.13	6.87	15.32	14.15	1.97
22	-11.55	-13.62	-6.98	1.47	3.45	-1.82	-6.33	-2.88	7.22	15.47	13.88	1.47
23	-11.82	-13.48	-6.68	1.67	3.38	-2.03	-6.37	-2.63	7.57	15.62	13.62	0.97
24	-12.07	-13.35	-6.38	1.85	3.3	-2.25	-6.4	-2.37	7.92	15.75	13.33	0.47
25	-12.3	-13.2	-6.08	2.03	3.2	-2.47	-6.42	-2.1	8.25	15.87	13.03	0.03
26	-12.53	-13.03	-5.77	2.2	3.1	-2.67	-6.42	-1.82	8.6	15.98	12.73	-0.53
27	-12.75	-12.87	-5.47	2.37	2.98	-2.88	-6.42	-1.53	8.93	16.08	12.4	-1.02
28	-12.95	-12.68	-5.17	2.52	2.87	-3.08	-6.4	-1.25	9.27	16.17	12.07	-1.52
29	-13.13	-12.57	-4.53	2.67	2.73	-3.3	-6.38	-0.95	9.6	16.23	11.73	-2.
30	-13.3		-4.23	2.8	2.6	-3.5	-6.35	-0.65	9.93	16.28	11.37	-2.48
31	-13.47		-4.25		2.47		-6.3	-0.35		16.33		-2.97

Marcel Délèze

Établissement des formules du cadran solaire vertical

www.deleze.name/marcel/physique/cadrans-solaires/vertical-mural/maths/proj-vert.pdf

Confectionnez votre cadran solaire

www.deleze.name/marcel/physique/cadrans-solaires