

Ballon dirigeable souple à masse de gaz constante (hélium) ayant un volume total d'enveloppe constant, équipé de ballonnets Air

Altitude de plénitude

Marcel Déléze

1. Caractéristiques du ballon

Cette caractéristique est fournie par le constructeur :

p_{su} = surpression d'utilisation de l'hélium par rapport à la pression atmosphérique, afin d'assurer une certaine rigidité de l'enveloppe

2. Une donnée de gonflage

Donner l'une des valeurs suivantes qui, chacune, caractérise le gonflage :

- $\frac{V_{He}}{V_{enveloppe}}$ = rapport des volumes « hélium/total » aux conditions atmosphériques standard
- $\frac{V_{ballonnets\ standard}}{V_{enveloppe}}$ = rapport des volumes « ballonnets/total » aux conditions atmosphériques standard

3. Données du jour du vol

3.1 Mesures au sol

p_1 = pression atmosphérique ; il s'agit de la pression non corrigée, c'est-à-dire qui n'est pas ramenée à l'altitude 0 ;

t_1 = température de l'air en degrés Celsius ; $T_1 = t_1 + 273.15\ K$;

H_1 = humidité relative de l'air ;

z_1 = altitude du lieu des mesures ; elle peut provenir d'un GPS ou d'une carte topographique, mais pas d'un altimètre basé sur la mesure de la pression.

3.2 Estimation de la surchauffe du gaz hélium par le pilote

Pour l'altitude de plénitude, le pilote doit faire une estimation de la surchauffe qui résulte du rayonnement infrarouge et des échanges convectifs de l'enveloppe avec le vent relatif. Comme cette surchauffe n'est pas connue avec précision, un intervalle est demandé :

$$s_{min}, s_{max}$$

3.3 Incertitude et sécurité à propos de la surchauffe

Si le but était d'obtenir le résultat le plus proche de l'altitude de plénitude réelle, les calculs

seraient réalisés avec la surchauffe moyenne $s_{moyen} = \frac{s_{min} + s_{max}}{2}$. Par contre, si l'unique préoccupation était la sécurité, c'est avec la surchauffe maximale s_{max} que les calculs seraient exécutés.

Dans cette version du calculateur, un compromis entre ces deux approches a été fait. La

surchauffe retenue est : $t_s = \frac{s_{moyen} + s_{max}}{2} = 0.25 * s_{min} + 0.75 * s_{max}$.

4. Lois physiques

4.1 Rapport des volumes « hélium/total »

Si le rapport des volumes « ballonnets/total » est donné, le rapport des volumes « hélium/total » s'en déduit :

$$\frac{V_{He}}{V_{enveloppe}} = 1 - \frac{V_{ballonnets\ standard}}{V_{enveloppe}}$$

4.2 Le modèle du nivellement barométrique

Le modèle du nivellement barométrique est décrit dans

www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/pression-altitude/pression-altitude.pdf

a = gradient de température ;

M, g, R = masse molaire de l'air, accélération gravifique, constante des gaz parfaits.

La pression et la température sont des valeurs moyennes, donc indépendantes des conditions météorologiques du jour, que l'on peut exprimer comme suit :

$$p_{nível}(z) = p_{standard} \cdot \left(1 - \frac{a}{T_{standard}} z\right)^{\frac{Mg}{Ra}} = \text{pression atmosphérique à l'altitude } z$$

$$T_{nível}(z) = T_{standard} - a \cdot z = \text{température de l'air à l'altitude } z$$

4.3 Modèle retenu pour l'atmosphère du jour

La pression et la température sont adaptées aux conditions atmosphériques du jour :

$$p(z) = p_1 \cdot \left(1 - \frac{a}{T_1} (z - z_1)\right)^{\frac{Mg}{Ra}} = \text{pression atmosphérique à l'altitude } z \text{ [Formule 4.3 a]}$$

$$T(z) = T_1 - a \cdot (z - z_1) = \text{température de l'air à l'altitude } z \text{ [Formule 4.3 b]}$$

4.4 Volume des ballonnets à l'altitude z

$V_{He}(z, t_s)$ = volume de l'hélium aux conditions atmosphériques standard en fonction de l'altitude z et la surchauffe t_s .

La quantité d'hélium étant constante, calculons, au moyen de la loi des gaz parfaits, l'évolution du volume de l'hélium entre les conditions atmosphériques standard et le jour du vol à l'altitude z :

$$\frac{(p_{standard} + p_{su}) \cdot V_{He}}{T_{standard}} = \frac{(p(z) + p_{su}) \cdot V_{He}(z, t_s)}{T(z) + t_s}$$

On en déduit le volume de l'hélium en fonction de l'altitude z et la surchauffe t_s :

$$V_{He}(z, t_s) = \frac{(p_{standard} + p_{su}) \cdot V_{He} \cdot (T(z) + t_s)}{(p(z) + p_{su}) \cdot T_{standard}} \text{ [Formule 4.4 a]}$$

ainsi que le volume des ballonnets à l'altitude z :

$$V_{ballonnets}(z, t_s) = V_{enveloppe} - V_{He}(z, t_s) \text{ [Formule 4.4 b]}$$

4.5 Altitude de plénitude du jour, avant correction d'humidité

Dans la [Formule 4.4 b], l'altitude z doit respecter la condition $V_{ballonnets}(z, t_s) \geq 0$, ce qui plafonne l'altitude à l'altitude de plénitude $z \leq z_{plén}(t_s)$.

À l'altitude de plénitude, les ballonnets d'air sont vides et l'hélium occupe tout le volume de l'enveloppe. Ainsi, $z_{plén}(t_s)$ est la solution de l'équation d'inconnue z que l'on obtient en exprimant que l'hélium obéit à la loi des gaz parfaits :

$$\frac{(p_{standard} + p_{su}) \cdot V_{He}}{T_{standard}} = \frac{(p(z) + p_{su}) \cdot V_{enveloppe}}{T(z) + t_s}$$

ou, d'une manière équivalente,

$$\frac{V_{He}}{V_{enveloppe}} \cdot \frac{T(z) + t_s}{T_{standard}} = \frac{p(z) + p_{su}}{p_{standard} + p_{su}} \text{ [Formule 4.5]}$$

que l'on peut résoudre au moyen d'une méthode numérique itérative, par exemple avec la méthode de la bisection ; voir [Annexe A]. On obtient ainsi

$$z_{plén,m} = \text{altitude de plénitude moyenne du jour, avant correction d'humidité}$$

4.5 Correction d'humidité

Voir [Annexe B2]. Il en résulte

$$z_{plén,h} = \text{alt}(z_{plén,m}) = \text{altitude de plénitude du jour, qui est la réponse finale.}$$

5. Calculs et résultats

5.1 Caractéristiques du gonflage

À partir du rapport des volumes « hélium/total », on calcule

$$\frac{V_{\text{ballonnets standard}}}{V_{\text{enveloppe}}} = 1 - \frac{V_{\text{He}}}{V_{\text{enveloppe}}} = \text{rapport des volumes « ballonnets/total » aux conditions atmosphériques standard}$$

5.2 Valeurs intermédiaires

Afficher les valeurs intermédiaires calculées.

5.3 Résultat

Altitude de plénitude après correction d'humidité : $z_{plén,h}$.

5.4 Calcul d'erreur

L'intervalle d'incertitude de l'altitude de plénitude est calculé comme suit :

$$z_{min} = \text{solution de l'équation [Formule 4.5] pour } t_s = s_{max} \text{ ;}$$

$$z_{max} = \text{solution de l'équation [Formule 4.5] pour } t_s = s_{min} \text{ .}$$

Ces deux équations sont résolues par une méthode itérative numérique, voir [Annexe A], puis la correction d'humidité est appliquée, voir [Annexe B2].

6. Calculateur numérique

Un calculateur en ligne est à disposition :

<https://www.deleze.name/marcel/physique/aerostat/helium/altitude-plénitude.html>

A1 Méthode de la bisection

Pour déterminer le zéro des fonctions $f_2(z)$ et $f(z)$, nous mettons en œuvre une méthode numérique. Or, ces deux fonctions sont continues, strictement croissantes sur tout l'intervalle où elles sont définies et possèdent un et un seul zéro. Elles se prêtent donc bien à l'utilisation de la méthode de la bisection.

La méthode de la bisection nécessite de donner un intervalle de recherche, mais il est ici possible de donner un intervalle extrêmement large qui inclut tous les cas possibles, y compris les plus extraordinaires. La méthode est donc sûre.

A2 Méthode itérative numérique pour l'altitude moyenne de plénitude

Le but est de fournir une caractéristique du ballon indépendante des conditions météorologiques. Pour ce faire, on tient compte de la surpression d'utilisation p_{su} , on se place dans des conditions standard $p_1 = p_{standard}$, $T_1 = T_{standard}$, et on néglige la surchauffe et l'humidité relative : $t_s = 0$ et $H_1 = 0$. L'équation [Formule 4.5] s'écrit alors :

$$\frac{V_{He}}{V_{enveloppe}} \cdot \frac{T_{standard} - a \cdot z}{T_{standard}} = \frac{p_{standard} \cdot \left(1 - \frac{a}{T_{standard}} z\right)^{\frac{M \cdot g}{R \cdot a}} + p_{su}}{p_{standard} + p_{su}} \quad [\text{Formule A2}]$$

La méthode utilisée est celle de la bisection.

	$p_{su} = 100 \text{ Pa}$	$p_{su} = 270 \text{ Pa}$	$p_{su} = 440 \text{ Pa}$	$p_{su} = 610 \text{ Pa}$
$\frac{V_{He}}{V_{enveloppe}} = 0.7$	3'569 m	3'578 m	3'587 m	3'596 m
$\frac{V_{He}}{V_{enveloppe}} = 0.71$	3'433 m	3'441 m	3'450 m	3'458 m
$\frac{V_{He}}{V_{enveloppe}} = 0.72$	3'298 m	3'306 m	3'314 m	3'322 m
$\frac{V_{He}}{V_{enveloppe}} = 0.73$	3'164 m	3'172 m	3'180 m	3'188 m
$\frac{V_{He}}{V_{enveloppe}} = 0.74$	3'032 m	3'040 m	3'047 m	3'055 m
$\frac{V_{He}}{V_{enveloppe}} = 0.75$	2'902 m	2'909 m	2'916 m	2'923 m
$\frac{V_{He}}{V_{enveloppe}} = 0.76$	2'772 m	2'779 m	2'786 m	2'792 m
$\frac{V_{He}}{V_{enveloppe}} = 0.77$	2'644 m	2'651 m	2'657 m	2'663 m
$\frac{V_{He}}{V_{enveloppe}} = 0.78$	2'517 m	2'523 m	2'529 m	2'535 m
$\frac{V_{He}}{V_{enveloppe}} = 0.79$	2'392 m	2'398 m	2'403 m	2'409 m
$\frac{V_{He}}{V_{enveloppe}} = 0.8$	2'268 m	2'273 m	2'278 m	2'283 m

A3 Méthode itérative numérique pour l'altitude de plénitude moyenne du jour, avant correction d'humidité

Résolution numérique de l'équation [Formule 4.5] .

La méthode utilisée est celle de la bissection.

Réponse : $z_{plén,m}$ = altitude de plénitude moyenne du jour, avant correction d'humidité.

B1 Table numérique de la pression de saturation de la vapeur d'eau en fonction de la température

Température en degrés Celsius t	Pression de saturation de la vapeur d'eau en hPa $p_{sat}(t)$	Température en degrés Celsius t	Pression de saturation de la vapeur d'eau en hPa $p_{sat}(t)$
-60	0.001	24	29.83
-40	0.13	25	31.67
-20	1.03	26	33.6
-18	1.5	27	35.64
-15	1.9	28	37.8
-12	2.4	29	40.05
-10	2.6	30	42.43
-9	3	31	44.92
-7	3.7	32	47.55
-4	4.6	33	50.3
-1	5.6	34	53.19
0	6.11	35	56.23
2	7.06	36	59.41
4	8.13	37	62.75
6	9.35	38	66.25
8	10.73	39	69.92
10	12.28	40	73.75
11	13.12	41	77.78
12	14.02	42	81.99
13	14.97	43	86.39
14	15.98	44	91.01
15	17.05	45	95.83
16	18.18	46	100.86
17	19.37	47	106.12
18	20.63	48	111.60
19	21.97	49	117.35
20	23.38	50	123.34
21	24.87		
22	26.43		
23	28.09		

B2 Correction d'humidité

B2.1 Donnée

H_1 = humidité relative du jour, mesurée au sol.

B2.2 Pression de saturation de la vapeur d'eau

A partir de la « Table numérique de la pression de saturation de la vapeur d'eau en fonction de la

température » (voir annexe B1), on construit par interpolation une fonction $p_{sat}(t)$ qui est définie pour toutes les températures $t \leq 50^\circ\text{C}$.

B2.3 Point de rosée

Au sol, la pression de la vapeur d'eau est égale à $H_1 \cdot p_{sat}(t_1)$.

Le point de rosée t_{rose} est la température pour laquelle cette pression de vapeur est saturante, c'est-à-dire qui vérifie l'équation

$$p_{sat}(t_{rose}) = H_1 \cdot p_{sat}(t_1) \quad [\text{Formule B2.3}]$$

B2.4 Altitude de la base des cumulus éventuels

Considérons le cas où, à la suite d'un réchauffement de la surface terrestre, des nuages se formeraient au cours de la journée. En adoptant cette évolution la plus défavorable, on prend une mesure de sécurité. La formule de *Stull*, dans laquelle les altitudes sont en mètres et les températures en degrés Celsius (ou en kelvins), donne l'altitude de la base des cumulus :

$$z_{cumulus} = z_1 + 125 \cdot (t_1 - t_{rose}) \quad [\text{Formule B2.4}]$$

B2.5 Humidité relative à l'altitude z

L'humidité relative à l'altitude z est calculée comme suit :

- si $z \geq z_{cumulus}$ alors $H(z) = H_{cumulus} = 100\%$;
- sinon, $H(z)$ est calculé par interpolation linéaire

$$H(z) = H_1 + (z - z_1) \cdot (H_{cumulus} - H_1) / (z_{cumulus} - z_1) \quad [\text{Formules B2.5}]$$

B2.6 Température virtuelle

La méthode de correction consiste à remplacer la température $T(z)$ par la température virtuelle $T_v(z)$ qui est la température qu'aurait l'air sec de même masse volumique et de même pression que l'air humide. Référence : Wikipedia, rubrique « Température virtuelle » :

$$T_v(z) = \frac{T(z)}{1 - 0.378 \cdot \frac{p_{eau}}{p(z)}} .$$

$p_{eau}(z)$ désigne la pression partielle de la vapeur d'eau

$$p_{eau}(z) = H(z) \cdot p_{sat}(T(z)) \quad [\text{Formule B2.6 a}]$$

Pour $z = z_{plén,m}$, calculons

$$c_{humid} = 1 - 0.378 \cdot \frac{p_{eau}(z_{plén,m})}{p(z_{plén,m})} \quad [\text{Formule B2.6 b}]$$

et la température virtuelle

$$T_v(z_{plén,m}) = \frac{T(z_{plén,m})}{c_{humid}} .$$

La différence de températures $\frac{T(z_{plén,m})}{c_{humid}} - T(z_{plén,m})$ ne sera que partiellement répercutée : le calcul de l'altitude de plénitude $z_{plén,m}$ se réfère à un état moyen de l'atmosphère, ce qui inclut une part d'humidité, tandis que la température virtuelle apporte une correction par rapport à de l'air sec. C'est pourquoi nous ne prenons en compte que la moitié de la correction de température :

$$\delta T = 0.5 \cdot T(z_{plén,m}) \cdot \left(\frac{1}{c_{humid}} - 1 \right) \quad [\text{Formule B2.6 c}]$$

B2.7 Correction d'altitude

T étant une fonction affine de z , la correction d'altitude correspondante est

$$\delta z = -\frac{\delta T}{a} \quad [\text{Formule B2.7 a}]$$

Cette correction s'applique à l'altitude de plénitude. Usuellement, la correction de température est positive, et la correction d'altitude est négative. La correction d'altitude est répartie uniformément sur la hauteur. L'altitude z corrigée est :

$$alt(z) = z + \delta z \cdot \frac{z - z_1}{z_{plén,m} - z_1} \quad [Formule B2.7 b]$$

B2.8 Affichage des résultats

La correction s'applique à l'altitude de plénitude, à la pression et à la température :

$z_{plén,h} = alt(z_{plén,m})$ = altitude de plénitude après correction d'humidité

$p(alt(z))$ = pression à l'altitude z après correction d'humidité

$T(alt(z))$ = température à l'altitude z après correction d'humidité

Par contre, la masse volumique de l'air, la force d'Archimède et la force ascensionnelle tiennent compte de l'humidité dès le début des calculs et ne doivent pas être corrigés :

$\rho_{air}(z, H)$ = masse volumique de l'air à l'altitude z , en tenant compte de l'humidité H ,

etc.

Janvier 2023