Précisions sur le calcul de la matrice d'interpolation [Q]

§ 3 Élément triangulaire générique, élargi à douze paramètres

Question § 3.6, p. 46
La matrice d'interpolation $[Q]$ est de la forme

$$[Q] = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_3^{-1} \end{matrix} & 0 \\ R & D_4^{-1} \end{pmatrix}$$

où $[D_1], [D_2], [D_3], [D_4]$ sont calculés explicitement.
Comment calculer la sous-matrice $[R]$ de dimensions 3x9 ?

Réponse
Les matrices $[D_1], [D_2], [D_3], [D_4]$ sont explicitées « à la main » afin de démontrer que la matrice $[Q]$ est régulière, c'est-à-dire inversible. Dans cette démonstration, la matrice $[R]$ ne joue aucun rôle ; il n'est donc pas nécessaire d'exprimer $[R]$ par des formules algébriques explicites.

Dans le programme, la forme explicite des matrices $[D_1], [D_2], [D_3], [D_4]$ est utilisée. Par contre, c'est le programme Fortran qui détermine la matrice $[R]$ par un calcul numérique. Montrons ci-dessous comment les calculs à faire se déduisent des définitions.

§ 2.3, p. 21, problème d'interpolation
Pour la base d'interpolation $(u_1, \; u_2, \; \cdots, \; u_n)$,
la matrice d'interpolation est $[Q] = (Q(u_1), \; Q(u_2), \; \cdots, \; Q(u_n))$.

§ 3.2, p. 34, triangle générique
Pour les éléments finis triangulaires de classe C¹, la fonction $Q(w)$ consiste à évaluer

$$Q(w) = \begin{pmatrix} Q_1(w) \\ Q_2(w) \\ Q_3(w) \\ Q_4(w) \\ Q_5(w) \\ Q_6(w) \\ Q_7(w) \\ Q_8(w) \\ Q_9(w) \\ Q_{10}(w) \\ Q_{11}(w) \\ Q_{12}(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(A_1) \\ \partial_x w(A_1) \\ \partial_y w(A_1) \\ w(A_2) \\ \partial_x w(A_2) \\ \partial_y w(A_2) \\ w(A_3) \\ \partial_x w(A_3) \\ \partial_y w(A_3) \\ \partial_{n_1} w(B_1) \\ \partial_{n_2} w(B_2) \\ \partial_{n_3} w(B_3) \end{pmatrix}$$

En mots : le 12ème paramètre d'interpolation appliqué à la fonction w consiste à prendre la valeur de la dérivée de la fonction w dans la direction n_3 au point B_3.

§ 3.6, p. 45, triangle générique élargi à 12 paramètres

$\left(u_1, \quad u_2, \quad \cdots, \quad u_{12}\right)$ sont les 12 fonctions formant la base d'interpolation définies aux pages 44 et 45 dans leur forme de référence, puis à la page 45 dans leur forme générique.

De la matrice d'interpolation

$$[Q] = \begin{pmatrix} Q_1(u_1), & Q_1(u_2), & \cdots, & Q_1(u_{12}) \\ Q_2(u_1), & Q_2(u_2), & \cdots, & Q_2(u_{12}) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ Q_{12}(u_1), & Q_{12}(u_2), & \cdots, & Q_{12}(u_{12}) \end{pmatrix}$$

on extrait la sous-matrice $[R]$ de dimensions 3x9 :

$$[R] = \begin{pmatrix} Q_{10}(u_1), & Q_{10}(u_2), & \cdots, & Q_{10}(u_9) \\ Q_{11}(u_1), & Q_{11}(u_2), & \cdots, & Q_{11}(u_9) \\ Q_{12}(u_1), & Q_{12}(u_2), & \cdots, & Q_{12}(u_9) \end{pmatrix}$$

En mots : *R* regroupe les valeurs des 3 paramètres de l'élargissement $\left(Q_{10}, \quad Q_{11}, \quad Q_{12}\right)$ sur les 9 fonctions de la base d'interpolation d'avant l'élargissement $\left(u_1, \quad u_2, \quad \cdots, \quad u_9\right)$. Plus explicitement,

$$[R] = \begin{pmatrix} \partial_{n_1} u_1(B_1), & \partial_{n_1} u_2(B_1), & \cdots, & \partial_{n_1} u_9(B_1) \\ \partial_{n_2} u_1(B_2), & \partial_{n_2} u_2(B_2), & \cdots, & \partial_{n_2} u_9(B_2) \\ \partial_{n_3} u_1(B_3), & \partial_{n_3} u_2(B_3), & \cdots, & \partial_{n_3} u_9(B_3) \end{pmatrix}$$

En mots : les coefficients de $[R]$ sont des dérivées directionnelles des 9 premières fonctions $\left(u_1, \quad u_2, \quad \cdots, \quad u_9\right)$ de la base d'interpolation ; les directions $\left(n_1, \quad n_2, \quad n_3\right)$ sont des vecteurs normaux aux côtés ; les points d'évaluation $\left(B_1, \quad B_2, \quad B_3\right)$ sont les milieux des côtés.
Les coefficients de $[R]$ peuvent être calculés dans le programme.

Pour l'organisation des calculs, et pour montrer le lien avec le programme Fortran, comparons avec la matrice d'interpolation pour le tétraèdre, variante II.

§ 5 Élément fini générique, élargi à 28 paramètres (variante II)

Question § 5.3, p. 65, et § 7.1, p. 98

La matrice d'interpolation [Q] est de la forme

$$[Q] \;=\; \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & D_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & D_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_3^{-1} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_4^{-1} & \\ \hline \multicolumn{8}{c|}{Q_1} & D_5^{-1} \end{array} \right)$$

où $[D_1],\ [D_2],\ [D_3],\ [D_4],\ [D_5]$ sont calculés explicitement.
Comment calculer la matrice $[Q_1]$ de dimensions 12x16 ?

Réponse :

Les matrices $[D_1],\ [D_2],\ [D_3],\ [D_4],\ [D_5]$ sont explicitées « à la main » afin de démontrer que la matrice Q est régulière, c'est-à-dire inversible. Dans cette démonstration, la matrice $[Q_1]$ ne joue aucun rôle ; il n'est donc pas nécessaire d'exprimer $[Q_1]$ par des formules algébriques explicites.

Dans le programme, la forme explicite des matrices $[D_1],\ [D_2],\ [D_3],\ [D_4],\ [D_5]$ est utilisée. Par contre, c'est le programme Fortran qui détermine la matrice $[Q_1]$ par un calcul numérique. Montrons ci-dessous comment les calculs à faire se déduisent des définitions.

§ 2.3, p. 21, problème d'interpolation

Pour la base d'interpolation $\left(u_1,\ \ u_2,\ \ \cdots,\ \ u_n\right)$,
la matrice d'interpolation est $[Q] \;=\; \left(Q(u_1),\ \ Q(u_2),\ \ \cdots,\ \ Q(u_n)\right)$.

§ 4.1, p. 54 et § 5.1, p. 58 : tétraèdre générique

La fonction $Q(w)$ consiste à évaluer

$$Q(w) \;=\; \begin{pmatrix} Q_1(w) \\ Q_2(w) \\ Q_3(w) \\ Q_4(w) \\ Q_5(w) \\ Q_6(w) \\ \cdots \\ Q_{17}(w) \\ Q_{18}(w) \\ \cdots \\ Q_{27}(w) \\ Q_{28}(w) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} w(A_1) \\ \partial_x w(A_1) \\ \partial_y w(A_1) \\ \partial_z w(A_1) \\ w(A_2) \\ \partial_x w(A_2) \\ \cdots \\ \partial_{n_{11}} w(B_{11}) \\ \partial_{n_{12}} w(B_{12}) \\ \cdots \\ \partial_{n_{42}} w(B_{42}) \\ \partial_{n_{43}} w(B_{43}) \end{pmatrix}$$

(voir fig. p. 54).

En mots : le 28ème paramètre d'interpolation appliqué à la fonction w consiste à prendre la valeur de la dérivée de la fonction w dans la direction n_{43} au point B_{43} .

§ 5.3, p. 65 : tétraèdre générique, élargi à 28 paramètres

$\left(u_1, \quad u_2, \quad \cdots, \quad u_{28}\right)$ sont les 28 fonctions d'interpolation définies au § 5.1 dans leur forme de référence, puis au § 5.3, p. 65 dans leur forme générique.

De la matrice d'interpolation

$$[Q] = \begin{pmatrix} Q_1(u_1), & Q_1(u_2), & \cdots, & Q_1(u_{28}) \\ Q_2(u_1), & Q_2(u_2), & \cdots, & Q_2(u_{28}) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ Q_{28}(u_1), & Q_{28}(u_2), & \cdots, & Q_{28}(u_{28}) \end{pmatrix}$$

on extrait la sous-matrice $[Q_1]$ de dimensions 12x16 :

$$[Q_1] = \begin{pmatrix} Q_{17}(u_1), & Q_{17}(u_2), & \cdots, & Q_{17}(u_{16}) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ Q_{28}(u_1), & Q_{28}(u_2), & \cdots, & Q_{28}(u_{16}) \end{pmatrix}$$

En mots : $[Q_1]$ regroupe les valeurs des 12 paramètres de l'élargissement $\left(Q_{17}, \quad \cdots, \quad Q_{28}\right)$ sur les 16 fonctions de la base d'interpolation d'avant l'élargissement $\left(u_1, \quad u_2, \quad \cdots, \quad u_{16}\right)$. Plus explicitement,

$$[Q_1] = \begin{pmatrix} \partial_{n_{11}} u_1(B_{11}), & \partial_{n_{11}} u_2(B_{11}), & \cdots, & \partial_{n_{11}} u_{15}(B_{11}) & \partial_{n_{11}} u_{16}(B_{11}) \\ \partial_{n_{12}} u_1(B_{12}), & \partial_{n_{12}} u_2(B_{12}), & \cdots, & \partial_{n_{12}} u_{15}(B_{12}) & \partial_{n_{12}} u_{16}(B_{12}) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots & \cdots \\ \partial_{n_{42}} u_1(B_{42}), & \partial_{n_{42}} u_2(B_{42}), & \cdots, & \partial_{n_{42}} u_{15}(B_{42}) & \partial_{n_{42}} u_{16}(B_{42}) \\ \partial_{n_{43}} u_1(B_{43}), & \partial_{n_{43}} u_2(B_{43}), & \cdots, & \partial_{n_{43}} u_{15}(B_{43}) & \partial_{n_{43}} u_{16}(B_{43}) \end{pmatrix}$$

En mots : les coefficients de $[Q_1]$ sont des dérivées directionnelles des 16 premières fonctions $\left(u_1, \quad u_2, \quad \cdots, \quad u_{16}\right)$ de la base d'interpolation ; les directions $\left(n_{11}, \quad n_{12}, \cdots, \quad n_{42}, \quad n_{43}\right)$ sont des vecteurs normaux aux arêtes ; les points d'évaluation $\left(B_{11}, \quad B_{12}, \cdots, \quad B_{42}, \quad B_{43}\right)$ sont les milieux des arêtes (voir fig. p. 54).

Les coefficients de $[Q_1]$ sont calculés dans le programme.
Pour l'organisation des calculs, faisons le lien avec le programme Fortran : le calcul de la matrice $[Q_1]$ est réalisé par la subroutine ELEM2, (§ 7.3, p. 113-114).
Le coeur du calcul est

```
CALL DU28(16, NX(I,1),NY(I,1),NZ(I,1),BX,BY,BZ,DU)
```

qui calcule les dérivées directionnelles des 16 premières fonctions de la base d'interpolation.
Les directions (NX(I,1),NY(I,1),NZ(I,1)) ont préalablement été initialisées par ELEM0.

En d'autres termes, DU28(16, …, DU) calcule une ligne de la matrice $[Q_1]$ et place le résultat dans DU.
DU est ensuite recopié dans Q1 :

```
Q1(IND,M)=DU(M)
```

§ 6 Élément fini générique, élargi à 44 paramètres (variante I-C)

Question § 6.3, p. 86, et § 8.1, p. 124

La matrice d'interpolation $[Q]$ est de la forme

$$[Q] \;=\; \left(\begin{array}{cccccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
0 & D_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & D_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_3^{-1} & 0 & 0 & & & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_4^{-1} & & & \\
 & & & & Q_1 & & & & D_5^{-1} & & \\
 & & & & & Q_2 & & & & D_6^{-1} & \\
 & & & & & & Q_3 & & & & D_7^{-1}
\end{array}\right)$$

où $[D_1],\ [D_2], \cdots,\ [D_6],\ [D_7]$ sont calculés explicitement.
Comment calculer les sous-matrices $[Q_1],[Q_2],[Q_3]$ de dimensions respectives 12x16, 4x28 et 12x32 ?

Réponse :
Les matrices $[D_1],\ [D_2], \cdots,\ [D_6],\ [D_7]$ sont explicitées « à la main » afin de démontrer que la matrice $[Q]$ est régulière, c'est-à-dire inversible. Dans cette démonstration, les sous-matrices $[Q_1],[Q_2],[Q_3]$ ne jouent aucun rôle ; il n'est donc pas nécessaire d'exprimer $[Q_1],[Q_2],[Q_3]$ par des formules algébriques explicites.

Dans le programme, la forme explicite des matrices $[D_1],\ [D_2], \cdots,\ [D_6],\ [D_7]$ est utilisée. Par contre, c'est le programme Fortran qui détermine les sous-matrices $[Q_1],[Q_2],[Q_3]$ par un calcul numérique. Montrons ci-dessous comment les calculs à faire se déduisent des définitions.

§ 2.3, p. 21, problème d'interpolation
Pour la base d'interpolation $\left(u_1,\ \ u_2,\ \ \cdots,\ \ u_n\right)$,
la matrice d'interpolation est $[Q] \;=\; \left(Q(u_1),\ \ Q(u_2),\ \ \cdots,\ \ Q(u_n)\right)$.

§ 4.1, p. 54 et § 6.1, p. 73, tétraèdre générique

La fonction $Q(w)$ consiste à évaluer

$$Q(w) = \begin{pmatrix} Q_1(w) \\ Q_2(w) \\ Q_3(w) \\ Q_4(w) \\ Q_5(w) \\ Q_6(w) \\ \cdots \\ Q_{17}(w) \\ Q_{18}(w) \\ \cdots \\ Q_{27}(w) \\ Q_{28}(w) \\ Q_{29}(w) \\ \cdots \\ Q_{32}(w) \\ Q_{33}(w) \\ Q_{34}(w) \\ \cdots \\ Q_{43}(w) \\ Q_{44}(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(A_1) \\ \partial_x w(A_1) \\ \partial_y w(A_1) \\ \partial_z w(A_1) \\ w(A_2) \\ \partial_x w(A_2) \\ \cdots \\ \partial_{n_{11}} w(B_{11}) \\ \partial_{n_{12}} w(B_{12}) \\ \cdots \\ \partial_{n_{42}} w(B_{42}) \\ \partial_{n_{43}} w(B_{43}) \\ \partial_{m_1} w(C_1) \\ \cdots \\ \partial_{m_4} w(C_4) \\ \partial_{m_1} w(C_{11}) \\ \partial_{m_1} w(C_{12}) \\ \cdots \\ \partial_{m_4} w(C_{42}) \\ \partial_{m_4} w(C_{43}) \end{pmatrix}$$

(voir fig. p. 71).

En mots : le 44ème paramètre d'interpolation appliqué à la fonction w consiste à prendre la valeur de la dérivée de la fonction w dans la direction m_4 au point C_{43} .

§ 6.3, p. 86 tétraèdre générique élargi à 44 paramètres

$(u_1, \ u_2, \ \cdots, \ u_{44})$ sont les 44 fonctions d'interpolation définies au § 6.1 dans leur forme de référence, puis au § 6.3, p. 86 dans leur forme générique.

De la matrice d'interpolation

$$[Q] = \begin{pmatrix} Q_1(u_1), & Q_1(u_2), & \cdots, & Q_1(u_{44}) \\ Q_2(u_1), & Q_2(u_2), & \cdots, & Q_2(u_{44}) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ Q_{44}(u_1), & Q_{44}(u_2), & \cdots, & Q_{44}(u_{44}) \end{pmatrix}$$

on extrait la sous-matrice $[Q_1]$ de dimensions 12x16 :

$$[Q_1] = \begin{pmatrix} Q_{17}(u_1), & Q_{17}(u_2), & \cdots, & Q_{17}(u_{16}) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ Q_{28}(u_1), & Q_{28}(u_2), & \cdots, & Q_{28}(u_{16}) \end{pmatrix}$$

En mots : la sous-matrice $[Q_1]$ regroupe les valeurs des 12 paramètres de l'élargissement $(Q_{17}, \ \cdots, \ Q_{28})$ sur les 16 fonctions de la base d'interpolation d'avant l'élargissement $(u_1, \ u_2, \ \cdots, \ u_{16})$. Plus explicitement,

$$[Q_1] = \begin{pmatrix} \partial_{n_{11}} u_1(B_{11}), & \partial_{n_{11}} u_2(B_{11}), & \cdots, & \partial_{n_{11}} u_{15}(B_{11}) & \partial_{n_{11}} u_{16}(B_{11}) \\ \partial_{n_{12}} u_1(B_{12}), & \partial_{n_{12}} u_2(B_{12}), & \cdots, & \partial_{n_{12}} u_{15}(B_{12}) & \partial_{n_{12}} u_{16}(B_{12}) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots & \cdots \\ \partial_{n_{42}} u_1(B_{42}), & \partial_{n_{42}} u_2(B_{42}), & \cdots, & \partial_{n_{42}} u_{15}(B_{42}) & \partial_{n_{42}} u_{16}(B_{42}) \\ \partial_{n_{43}} u_1(B_{43}), & \partial_{n_{43}} u_2(B_{43}), & \cdots, & \partial_{n_{43}} u_{15}(B_{43}) & \partial_{n_{43}} u_{16}(B_{43}) \end{pmatrix}$$

En mots : les coefficients de $[Q_1]$ sont des dérivées directionnelles des 16 premières fonctions $(u_1, \; u_2, \; \cdots, \; u_{16})$ de la base d'interpolation ; les directions $(n_{11}, \; n_{12}, \cdots, \; n_{42}, \; n_{43})$ sont des vecteurs normaux aux arêtes ; les points d'évaluation $(B_{11}, \; B_{12}, \cdots, \; B_{42}, \; B_{43})$ sont les milieux des arêtes (voir fig. p. 54).

Les coefficients de $[Q_1]$ sont calculés dans le programme.
Pour l'organisation des calculs, faisons le lien avec le programme Fortran : le calcul de la matrice $[Q_1]$ est réalisé par la subroutine ELEM2, (§ 8.3, p. 144).
Le coeur du calcul est

```
CALL DU44(16, NX(I,1),NY(I,1),NZ(I,1),PX,PY,PZ,DU)
```

qui calcule les dérivées directionnelles des 16 premières fonctions de la base d'interpolation.
Les directions (NX(I,1),NY(I,1),NZ(I,1)) ont préalablement été initialisées par ELEM0.

En d'autres termes, DU44(16, …, DU) calcule une ligne de la matrice $[Q_1]$ et place le résultat dans DU.
DU est ensuite recopié dans Q1 :

```
Q1(IND,M)=DU(M)
```

De $[Q]$, on extrait la sous-matrice $[Q_2]$ de dimensions 4x28 :

$$[Q_2] = \begin{pmatrix} Q_{29}(u_1), & Q_{29}(u_2), & \cdots, & Q_{29}(u_{28}) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ Q_{32}(u_1), & Q_{32}(u_2), & \cdots, & Q_{32}(u_{28}) \end{pmatrix}$$

En mots : la sous-matrice $[Q_2]$ regroupe les valeurs des 4 paramètres de l'élargissement $(Q_{29}, \; Q_{30}, \; Q_{31}, \; Q_{32})$ sur les 28 fonctions de la base d'interpolation d'avant l'élargissement $(u_1, \; u_2, \; \cdots, \; u_{28})$. Plus explicitement,

$$[Q_2] = \begin{pmatrix} \partial_{m_1} u_1(C_1), & \partial_{m_1} u_2(C_1), & \cdots, & \partial_{m_1} u_{27}(C_1) & \partial_{m_1} u_{28}(C_1) \\ \partial_{m_2} u_1(C_2), & \partial_{m_2} u_2(C_2), & \cdots, & \partial_{m_2} u_{27}(C_2) & \partial_{m_2} u_{28}(C_2) \\ \partial_{m_3} u_1(C_3), & \partial_{m_3} u_2(C_3), & \cdots, & \partial_{m_3} u_{27}(C_3) & \partial_{m_3} u_{28}(C_3) \\ \partial_{m_4} u_1(C_4), & \partial_{m_4} u_2(C_4), & \cdots, & \partial_{m_4} u_{27}(C_4) & \partial_{m_4} u_{28}(C_4) \end{pmatrix}$$

En mots : les coefficients de $[Q_2]$ sont des dérivées directionnelles des 28 premières fonctions $(u_1, \; u_2, \; \cdots, \; u_{28})$ de la base d'interpolation ; les directions $(m_1, \; m_2, \; m_3, \; m_4)$ sont des vecteurs normaux aux faces ; les points d'évaluation $(C_1, \; C_2, \; C_3, \; C_4)$ sont les points milieux des faces (voir fig. 6.1, p. 71).

Les coefficients de $[Q_2]$ sont calculés dans le programme.

Pour l'organisation des calculs, faisons le lien avec le programme Fortran : le calcul de la matrice $[Q_2]$ est réalisé par la subroutine ELEM2, (§ 8.3, p. 144).
Le coeur du calcul est

```
CALL DU44(28, MX(I),MY(I),MZ(I),PX,PY,PZ,DU)
```

qui calcule les dérivées directionnelles des 28 premières fonctions de la base d'interpolation.
Les directions (MX(I),MY(I),MZ(I)) ont préalablement été initialisées par ELEM0.

En d'autres termes, DU44(28, …, DU) calcule une ligne de la matrice $[Q_2]$ et place le résultat dans DU.
DU est ensuite recopié dans Q2 :

```
Q2(I,M)=DU(M)
```

De $[Q]$, on extrait la sous-matrice $[Q_3]$ de dimensions 12x32 :

$$[Q_3] = \begin{pmatrix} Q_{33}(u_1), & Q_{33}(u_2), & \cdots, & Q_{33}(u_{32}) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ Q_{44}(u_1), & Q_{44}(u_2), & \cdots, & Q_{44}(u_{32}) \end{pmatrix}$$

En mots : la sous-matrice $[Q_3]$ regroupe les valeurs des 12 paramètres de l'élargissement $(Q_{33}, \ \cdots, \ Q_{44})$ sur les 32 fonctions de la base d'interpolation d'avant l'élargissement $(u_1, \ u_2, \ \cdots, \ u_{32})$. Plus explicitement,

$$[Q_3] = \begin{pmatrix} \partial_{m_1} u_1(C_{11}), & \partial_{m_1} u_2(C_{11}), & \cdots, & \partial_{m_1} u_{31}(C_{11}) & \partial_{m_1} u_{32}(C_{11}) \\ \partial_{m_2} u_1(C_{12}), & \partial_{m_2} u_2(C_{12}), & \cdots, & \partial_{m_2} u_{31}(C_{12}) & \partial_{m_2} u_{32}(C_{12}) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots & \cdots \\ \partial_{m_4} u_1(C_{42}), & \partial_{m_4} u_2(C_{42}), & \cdots, & \partial_{m_4} u_{31}(C_{42}) & \partial_{m_4} u_{32}(C_{42}) \\ \partial_{m_4} u_1(C_{43}), & \partial_{m_4} u_2(C_{43}), & \cdots, & \partial_{m_4} u_{31}(C_{43}) & \partial_{m_4} u_{32}(C_{43}) \end{pmatrix}$$

En mots : les coefficients de $[Q_3]$ sont des dérivées directionnelles des 32 premières fonctions $(u_1, \ u_2, \ \cdots, \ u_{32})$ de la base d'interpolation ; les directions $(m_1, \ m_2, \ m_3, \ m_4)$ sont des vecteurs normaux aux faces ; les points d'évaluation $(C_{11}, \ C_{12}, \cdots, \ C_{42}, \ C_{43})$ sont des points situés à l'intersection des faces et des plans de raccordement entre les morceaux (voir fig. 6.1, p. 71).

Les coefficients de $[Q_3]$ sont calculés dans le programme.
Pour l'organisation des calculs, faisons le lien avec le programme Fortran : le calcul de la matrice $[Q_3]$ est réalisé par la subroutine ELEM2, (§ 8.3, p. 144).
Le coeur du calcul est

```
CALL DU44(32, MX(I),MY(I),MZ(I),BX,BY,BZ,DU)
```

qui calcule les dérivées directionnelles des 32 premières fonctions de la base d'interpolation.
Les directions (MX(I),MY(I),MZ(I)) ont préalablement été initialisées par ELEM0.

En d'autres termes, DU44(32, …, DU) calcule une ligne de la matrice $[Q_3]$ et place le résultat dans DU.
DU est ensuite recopié dans Q3 :

```
Q3(IND,M)=DU(M)
```

Le 18 août 2015

Lien vers la page mère :

Éléments finis tétraédriques de classe C^1 et de degré 2

www.deleze.name/marcel/maths/these.html