

Étude de fonctions - Exercice r2-02

$$h(x) = x^3 - x^2 + 4$$

Directive : Reporter la détermination des zéros de h à la fin de l'étude de h . Calculer les zéros de h à la précision de ± 0.05

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} - 1$$

Indication: les résultats de l'étude de h sont utiles pour l'étude de f .

[Liste d'exercices corrigés: études de fractions rationnelles](http://www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/fractions-rationnelles/index.html)

www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/fractions-rationnelles/index.html

Corrigé de l'étude de $h(x)$

Ensemble de définition de h : $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = x(-2 + 3x)$$

Signe($h'(x)$) :	négatif pour	$0 < x < \frac{2}{3}$
	nul pour	$x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$
	positif pour	$x < 0$ ou $x > \frac{2}{3}$

$$h''(x) = 2(-1 + 3x)$$

Signe($h''(x)$) :	négatif pour	$x < \frac{1}{3}$
	nul pour	$x = \frac{1}{3}$
	positif pour	$x > \frac{1}{3}$

Candidat(s) extremum(s) : $\{(0, 4), (\frac{2}{3}, \frac{104}{27})\}$

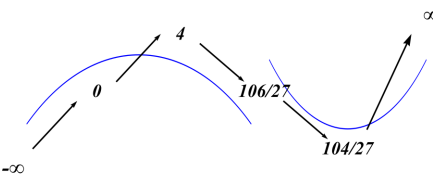
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\{(\frac{1}{3}, \frac{106}{27})\}$

Pas d'asymptote verticale.

Du côté $+\infty$, pas d'asymptote affine.

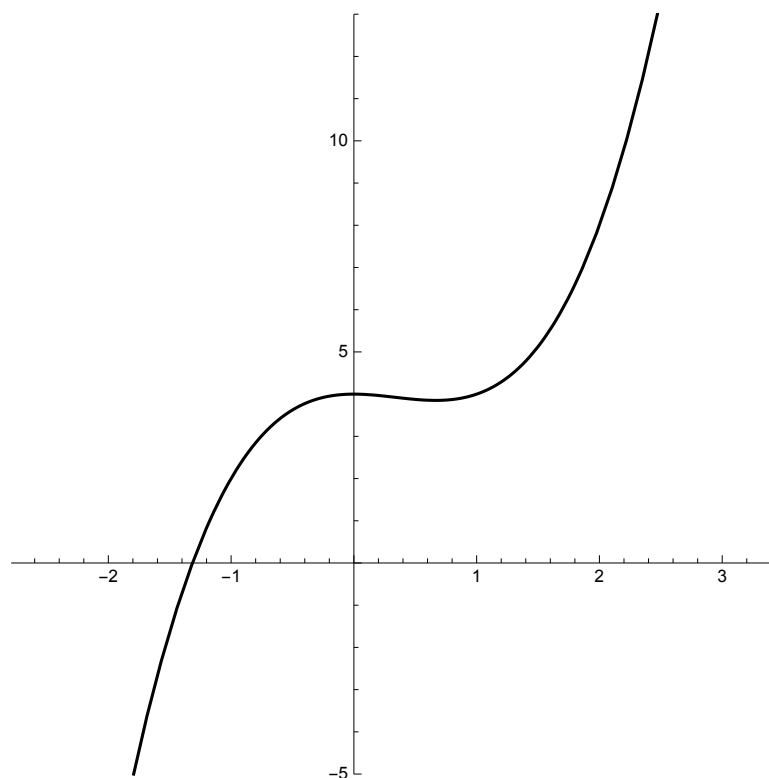
Du côté $-\infty$, pas d'asymptote affine.

Tableau de variations de h

x	$-\infty$	-1.31	0	$1/3$	$2/3$	∞		
$sgn(h'(x))$		$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$sgn(h''(x))$		$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$var(h(x))$								
$sgn(h(x))$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

La valeur du zéro de h peut être déterminée avec une méthode numérique, par exemple avec la méthode de la bisection. Le signe de h peut se déduire du tableau de variations de h .

Graphique de h



Corrigé de l'étude de $f(x)$

Quotient (ou partie polynomiale) = $-1 + x$

$$\frac{\text{Reste}}{\text{Dénominateur}} = \frac{4x}{(-2+x)(2+x)}$$

Ensemble de définition de f : $x < -2$ ou $-2 < x < 2$ ou $x > 2$

$$f(x) = \frac{4 - x^2 + x^3}{(-2+x)(2+x)} = \frac{h(x)}{(-2+x)(2+x)}$$

Signe($f(x)$) :

négatif pour	$x < -2$ ou $-1.3146 < x < 2$
nul pour	$x = -1.3146$
positif pour	$-2 < x < -1.3146$ ou $x > 2$

$$f'(x) = \frac{x^2(-12+x^2)}{(-2+x)^2(2+x)^2}$$

Signe($f'(x)$) :

négatif pour	$-2\sqrt{3} < x < -2$ ou $-2 < x < 0$ ou $0 < x < 2$ ou $2 < x < 2\sqrt{3}$
nul pour	$x = -2\sqrt{3}$ ou $x = 0$ ou $x = 2\sqrt{3}$
positif pour	$x < -2\sqrt{3}$ ou $x > 2\sqrt{3}$

$$f''(x) = \frac{8x(12+x^2)}{(-2+x)^3(2+x)^3}$$

Signe($f''(x)$) :	négatif pour	$x < -2$ ou $0 < x < 2$
	nul pour	$x = 0$
	positif pour	$-2 < x < 0$ ou $x > 2$

Candidat(s) extremum(s) : $\{(-2\sqrt{3}, -1 - 3\sqrt{3}), (0, -1), (2\sqrt{3}, -1 + 3\sqrt{3})\}$

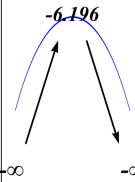
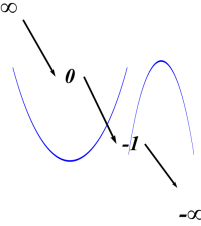
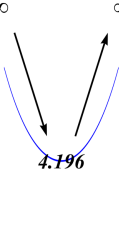
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\{(0, -1)\}$

Asymptotes verticales : $x = -2$ et $x = 2$

Du côté $+\infty$, asymptote affine $y = (1)x + (-1)$

Du côté $-\infty$, asymptote affine $y = (1)x + (-1)$

Tableau de variations de f

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	-2	-1.31	0	2	$2\sqrt{3}$	∞
$sgn(f(x))$	---			+ 0 ---			+++	
$sgn(f'(x))$	+ 0 -			--- 0 -			- 0 +	
$sgn(f''(x))$	---			+++ 0 -			+++	
$var(f(x))$								

Graphique de f

