

# Études de fractions rationnelles avec corrigés

## Directives

Pour tous les exercices (sauf mention contraire) : faire une étude complète de la fonction donnée incluant

- ensemble de définition ; le cas échéant : parité, périodicité ;
- signe de la fonction ;
- dérivée, signe de la dérivée ;
- dérivée seconde, signe de la dérivée seconde ;
- tableau de variations avec intervalles de monotonie et de convexité ;
- limites et asymptotes éventuelles ;
- graphique de la fonction.

Lorsque le calcul numérique d'un zéro est demandé, le choix de la méthode est libre : méthode de la bisection, méthode de la sécante, méthode de Newton, ou autre.

## Étude de fonctions polynomiales

### Exercice corrigé r0-01

Discuter, en fonction du paramètre réel  $m$ , le nombre de racines de l'équation

$$x^3 + 2x^2 = 8x + m$$

Directive : Faire une étude complète la fonction

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$$

puis discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = m$$

### Exercice corrigé r0-02

On donne la fonction

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx$$

où  $b$  et  $c$  sont deux constantes. Calculer les valeurs qu'il faut attribuer à  $b$  et  $c$  pour que la fonction possède un extremum en  $x=3$  et que la tangente à  $f$  en  $x=3$  coupe le graphe de la fonction  $f$  en  $x=1$ .

## Étude de fractions rationnelles (= quotients de deux polynômes)

### Exercice corrigé r1-01

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$$

### Exercice corrigé r1-02

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

### Exercice corrigé r1-03

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2+3x}$$

### Exercice corrigé r1-04

$$f(x) = \frac{x^2/2 + 2x - 4}{x - 2}$$

### Exercice corrigé r1-05

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$$

Directive : Il n'est pas demandé de faire usage de la dérivée seconde.

### Exercice corrigé r1-06

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$$

### Exercice corrigé r1-07

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 6}{(x - 1)^2}$$

Indication : Un zéro de la fonction est un petit nombre entier.

### Exercice corrigé r1-08

$$f(x) = \frac{x^3}{x - 2}$$

### Exercice corrigé r1-09

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 1} + \frac{1}{2}$$

Directive : Les zéros de la fonction ne sont pas demandés.

## Étude de fractions rationnelles avec calcul numérique de zéros

### Exercice corrigé r2-01

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^3}$$

Indication : Reporter la détermination des zéros de  $f$  à la fin de l'étude. Déterminer la valeur numérique du zéro de  $f$  à la précision de  $\pm 0.05$

### Exercice corrigé r2-02

$$h(x) = x^3 - x^2 + 4$$

Directive : Reporter la détermination des zéros de  $h$  à la fin de l'étude de  $h$ . Calculer les zéros de  $h$  à la précision de  $\pm 0.05$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} - 1$$

Indication : Les résultats de l'étude de  $h$  sont utiles pour l'étude de  $f$ .

### Exercice corrigé r2-03

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$$

Directive : On déterminera les valeurs numériques des points d'inflexion à la précision de  $\pm 0.05$

### Exercice corrigé r2-04

$$f(x) = \frac{27x}{(x-2)^2} - x - 3$$

Indication : Reporter la détermination des zéros de la fonction à la fin de l'étude. Calculer leurs valeurs numériques à la précision de  $\pm 0.05$

### En coulisses

Les corrigés ont été fabriqués comme suit :

1. Avec le logiciel *Mathematica* de *Wolfram*
  - le [package EtudeFct](#) automatise partiellement les études de fonctions ; le système ne produit pas le tableau de variations proprement dit, mais fournit les informations nécessaires ; le graphique est donné ;
  - l'output est converti en langage L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.
2. Avec un éditeur T<sub>E</sub>X : la mise en forme du document L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X est retravaillée, et la conversion en PDF est effectuée.
3. Le tableau de variations est ajouté après coup :
  - avec l'application en ligne [Créer le tableau de variations](#), un fichier *.svg* est enregistré ;
  - avec l'application gratuite GIMP, l'image *.svg* est convertie en fichier *.eps* ;
  - avec l'éditeur T<sub>E</sub>X, l'image *.eps* est insérée dans le document L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X ;

Exception : l'exercice r1-09 a été rédigé en *Mathematica* sans utiliser le package EtudeFct, puis directement imprimé en PDF.

### Liens

[Contact](#)

[Accueil](#)

[Mathématiques, degré secondaire II](#)

[Exercices avec corrigés](#)

[Études de fonctions](#)