Étude de fonctions exponentielles ou logarithmiques

Exercice el3-02

$$f(x) = x \ln\left|x^2-1\right|$$

Indication : le signe de f'' peut faciliter la détermination du signe de f'.

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions exponentielles ou logarithmiques
www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/exp-log/index.html

Corrigé

f est une fonction impaire, car $f(-x) = -f(x)$.

Restriction aux x tels que $x^2-1>0$

$$f_1(x) = x \ln\left(x^2-1\right)$$

Signe($f_1(x)$) :

négatif pour	$x < -\sqrt{2}$ ou $1 < x < \sqrt{2}$
nul pour	$x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$
positif pour	$-\sqrt{2} < x < -1$ ou $x > \sqrt{2}$

$$f_1'(x) = \frac{2x^2 - \ln\left[-1+x^2\right] + x^2 \ln\left[-1+x^2\right]}{(-1+x)(1+x)}$$

Signe($f_1'(x)$) :

négatif pour	$x \in \{\}$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x < -1$ ou $x > 1$

$$f_1''(x) = \frac{2x\left(-3+x^2\right)}{(-1+x)^2(1+x)^2}$$

Signe($f_1''(x)$) :

négatif pour	$x < -\sqrt{3}$ ou $1 < x < \sqrt{3}$
nul pour	$x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$
positif pour	$-\sqrt{3} < x < -1$ ou $x > \sqrt{3}$

Candidat(s) extremum(s) : Aucun
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\left\{\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\ln(2)\right), \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\ln(2)\right)\right\}$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Du côté $+\infty$, pas d'asymptote affine.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Du côté -$\infty$, pas d'asymptote affine.

Restriction aux x tels que $x^2-1<0$

$$f_2(x) = x \ln\left(-x^2+1\right)$$

Ensemble de définition de f_2 : $-1 < x < 1$

Signe($f_2(x)$) :

négatif pour	$0 < x < 1$
nul pour	$x = 0$
positif pour	$-1 < x < 0$

$$f_2'(x) = \frac{2x^2 - \ln\left(1-x^2\right) + x^2 \ln\left(1-x^2\right)}{(-1+x)(1+x)}$$

Signe($f_2'(x)$) :

négatif pour	$-1 < x < 0$ ou $0 < x < 1$
nul pour	$x = 0$
positif pour	$x \in \{\}$

$$f_2''(x) = \frac{2x\left(-3+x^2\right)}{(-1+x)^2(1+x)^2}$$

Signe($f_2''(x)$) :

négatif pour	$0 < x < 1$
nul pour	$x = 0$
positif pour	$-1 < x < 0$

Candidat(s) extremum(s) : $\{(0,0)\}$, mais n'en est pas un.
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\{(0,0)\}$.
La dérivée en 0 est nulle (tangente horizontale).
Du côté $+\infty$, fonction f_2 non définie.
Du côté -∞, fonction f_2 non définie.

Traitement de la valeur absolue (raccordement des deux cas)

$\lim_{x\to-1} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$.
Asymptotes verticales doubles $x = -1$ et $x = 1$

Tableau de variations de f

x		*0*		*1*		*1.414*	*1.732*	∞
	Symétrie centrale de centre O(0, 0)							
sgn(f(x))	...	*0*	−	‖	−	*0*	+	+ +
sgn(f'(x))	...	*0*	−	‖	+	+	+	+ +
sgn(f''(x))	...	*0*	−	‖	−	−	−	*0* +
var(f(x))	...	*0*	-∞	‖	-∞	*0*	*1.201*	∞

Graphique de f