Étude de fonctions exponentielles ou logarithmiques

Exercice el3-01

$$f(x) = \mathrm{e}^x + x(\ln(x) - 1 - \mathrm{e})$$

Directives et indications : déterminer dans l'ordre: le signe de la dérivée seconde, un zéro évident de la dérivée première, le signe de la dérivée première, le tableau de variations de la fonction; les valeurs numériques des zéros de la fonction à la précision ± 0.05

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions exponentielles ou logarithmiques
www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/exp-log/index.html

Corrigé

Ensemble de définition de f : $x > 0$

$$f'(x) = -e + \mathrm{e}^x + \ln(x)$$

$$f''(x) = \frac{1 + \mathrm{e}^x x}{x}$$

Signe($f''(x)$) :

négatif pour	$x \in \{\}$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x > 0$

Signe($f'(x)$) :

négatif pour	$0 < x < 1$
nul pour	$x = 1$
positif pour	$x > 1$

Candidat(s) extremum(s) : $\{(1, -1)\}$
Candidat(s) point(s) d'inflexion : Aucun

$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 1$. Aucune asymptote verticale.
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Du côté $+\infty$, pas d'asymptote affine.
Du côté -∞, fonction non définie.

Tableau de variations

x	*0*		*0.253*		*1*		*1.683*		∞
sgn(f''(x))		+	+	+	+	+	+	+	
sgn(f'(x))		−	−	−	*0*	+	+	+	
var(f(x))	*1*	↘	*0*	↘	*-1*	↗	*0*	↗	∞
sgn(f(x))		+	*0*	−	−	−	*0*	+	

Les variations de la fonction montrent que f possède exactement deux zéros dont on peut calculer les valeurs au moyen d'une méthode numérique, par exemple avec la méthode de la bissection.

Signe($f(x)$) :

négatif pour	$0.252802 < x < 1.68302$
nul pour	$x = 0.252802$ ou $x = 1.68302$
positif pour	$0 < x < 0.252802$ ou $x > 1.68302$

Graphique