Étude de fonctions exponentielles ou logarithmiques

Exercice el2-04

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} - 3\ln(x)$$

Indication : Reporter l'étude du signe de la fonction à la fin de l' étude.
Directive : Déterminer la valeur numérique des zéros de f à la précision $\pm$ 0.1

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions exponentielles ou logarithmiques
www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/exp-log/index.html

Corrigé

Ensemble de définition de f : $x > 0$
$f(x) = \frac{-1+x^2-3x\ln(x)}{x}$

$$f'(x) = \frac{1 - 3x + x^2}{x^2}$$

Signe($f'(x)$) :

négatif pour	$\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right) < x < \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$
nul pour	$x = \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$ ou $x = \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$
positif pour	$0 < x < \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$ ou $x > \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$

$$f''(x) = \frac{-2 + 3x}{x^3}$$

Signe($f''(x)$) :

négatif pour	$0 < x < \frac{2}{3}$
nul pour	$x = \frac{2}{3}$
positif pour	$x > \frac{2}{3}$

Candidat(s) extremum(s) :
$\left\{\left(\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right), \frac{-5+3\sqrt{5}-3\left(-3+\sqrt{5}\right)\ln\left(\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)\right)}{-3+\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right), \frac{5+3\sqrt{5}-3\left(3+\sqrt{5}\right)\ln\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\right)}{3+\sqrt{5}}\right)\right\}$
Candidat(s) extremum(s) : $\{(0.381966, 0.651203), (2.61803, -0.651203)\}$
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{6} + 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right\}$
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\{(0.666667, 0.383062)\}$
$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = -\infty$. Asymptote verticale simple $x = 0$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Du côté $+\infty$, pas d'asymptote affine (direction asymptotique = 1)
Du côté -∞, fonction non définie.

Tableau de variations de la fonction

x	0	0.197	0.382	0.667	1	2.618	5.064	∞
sgn(f'(x))		+ + +	0	− − −	− −	0	+ + +	
sgn(f''(x))		− − −	− −	0	+ + +	+ + +	+ +	
var(f(x))	-∞ ↗	0 ↗	0.651 ↘	0.383 ↘	0 ↘	-0.651 ↗	0 ↗	∞
sgn(f(x))		− 0 +	+ + +	+ 0	− −	− 0	+	

Les variations de la fonction montrent que f possède exactement trois zéros qu'on peut déterminer avec une méthode numérique, par exemple avec la méthode de la bissection. Les signes de f s'en déduisent immédiatement.

Signe($f(x)$) :

négatif pour	$0 < x < 0.197477$ ou $1 < x < 5.06387$
nul pour	$x = 0.197477$ ou $x = 1$ ou $x = 5.06387$
positif pour	$0.197477 < x < 1$ ou $x > 5.06387$

Graphique