

Étude de fonctions exponentielles ou logarithmiques

Exercice el2-01

Prologue: étudier la fonction h , en reportant l'étude du signe à la fin de l'étude de h :

$$h(x) = 1 + \ln(1 + 2x) + 2x \ln(1 + 2x)$$

Faire une étude complète de la fonction f , sans faire usage de la dérivée seconde:

$$f(x) = (\ln(2x + 1))^2 - \frac{2}{2x + 1}$$

Indications: Reporter la détermination des zéros de f à la fin de l'étude. Au cours de l'étude de f , le signe de h peut être utile.

Directive: Calculer la valeur numérique du zéro (ou des zéros) de f à la précision de ± 0.05

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions exponentielles ou logarithmiques
www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/exp-log/index.html

Corrigé

Étude de h

Ensemble de définition de h : $x > -\frac{1}{2}$

$$h'(x) = 2(1 + \ln(1 + 2x))$$

Signe($h'(x)$) :

négatif pour	$-\frac{1}{2} < x < \frac{1-e}{2e}$
nul pour	$x = \frac{1-e}{2e}$
positif pour	$x > -\frac{1+e}{2e}$

$$h''(x) = \frac{4}{1 + 2x}$$

Signe($h''(x)$) :

négatif pour	$x \in \{\}$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x > -\frac{1}{2}$

Candidat(s) extremum(s) : $\left\{ \left(\frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{e} \right), 1 - \frac{1}{e} \right) \right\}$

Candidat(s) point(s) d'inflexion : Aucun

$\lim_{x \downarrow -\frac{1}{2}} h(x) = 1$. Aucune asymptote verticale.

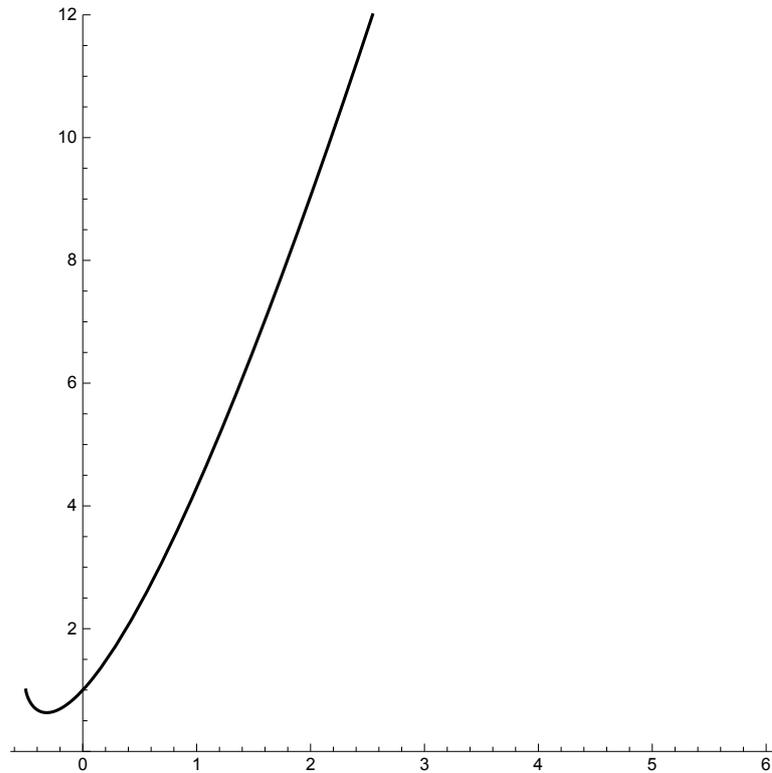
Du côté $+\infty$, pas d'asymptote affine.

Du côté $-\infty$, fonction non définie.

Tableau de variations de la fonction h

x	-0.5	-0.316	∞
$sgn(h'(x))$		$- \quad 0 \quad +$	
$sgn(h''(x))$		$+ \quad + \quad +$	
$var(h(x))$			
$sgn(h(x))$		$+ \quad + \quad +$	

Du tableau de variations, on peut déduire le signe de h .
 Graphique de h



Étude de f

Ensemble de définition de $f : x > -\frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{-2 + (\ln(1+2x))^2 + 2x(\ln(1+2x))^2}{1+2x}$$

$$f'(x) = \frac{4(1 + \ln(1 + 2x) + 2x \ln(1 + 2x))}{(1 + 2x)^2} = \frac{4h(x)}{(1 + 2x)^2}$$

Signe($f'(x)$) :

négatif pour	$x \in \{ \}$
nul pour	$x \in \{ \}$
positif pour	$x > -\frac{1}{2}$

Candidat(s) extremum(s) : Aucun

$\lim_{x \downarrow -\frac{1}{2}} f(x) = -\infty$. Asymptote verticale $x = -\frac{1}{2}$

Du côté $+\infty$, direction asymptotique nulle et $f(x) \rightarrow \infty$

Du côté $-\infty$, fonction non définie.

Tableau de variations de la fonction f

x		-0.5		0.731		∞
$sgn(f'(x))$				+	+	+
$var(f(x))$						
$sgn(f(x))$				-	0	+

Les variations montrent que f possède un et un seul zéro que l'on peut déterminer avec une méthode numérique, par exemple avec la méthode de la bisection.

Signe($f(x)$) :	négatif pour	$-0.5 < x < 0.731279$
	nul pour	$x = 0.731279$
	positif pour	$x > 0.731279$

Graphique de f

