Étude de fonctions exponentielles ou logarithmiques

Exercice el1-14

$$f(x) = x + \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

Indication : Reporter l'étude du signe de f à la fin de l'étude.

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions exponentielles ou logarithmiques
www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/exp-log/index.html

Corrigé

Ensemble de définition de f : $x \in \mathbb{R}$
La fonction est impaire, car $f(-x) = f(x)$.
$f(x) = \frac{-1+\mathrm{e}^{2x}+x+\mathrm{e}^{2x}x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$

$$f'(x) = \frac{1 + 6\mathrm{e}^{2x} + (\mathrm{e}^{2x})^2}{(1+\mathrm{e}^{2x})^2}$$

En posant $z = \mathrm{e}^{2x}$ et en résolvant l'équation $z^2 + 6z + 1 = 0$, on obtient deux solutions négatives $z = -3 \pm \sqrt{8}$, donc aucune solution x.

Signe($f'(x)$) :

négatif pour	$x \in \{\}$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = -\frac{8\mathrm{e}^{2x}\,(-1+\mathrm{e}^x)\,(1+\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^{2x})^3}$$

Signe($f''(x)$) :

négatif pour	$x > 0$
nul pour	$x = 0$
positif pour	$x < 0$

Candidat(s) extremum(s) : Aucun
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\{(0,0)\}$

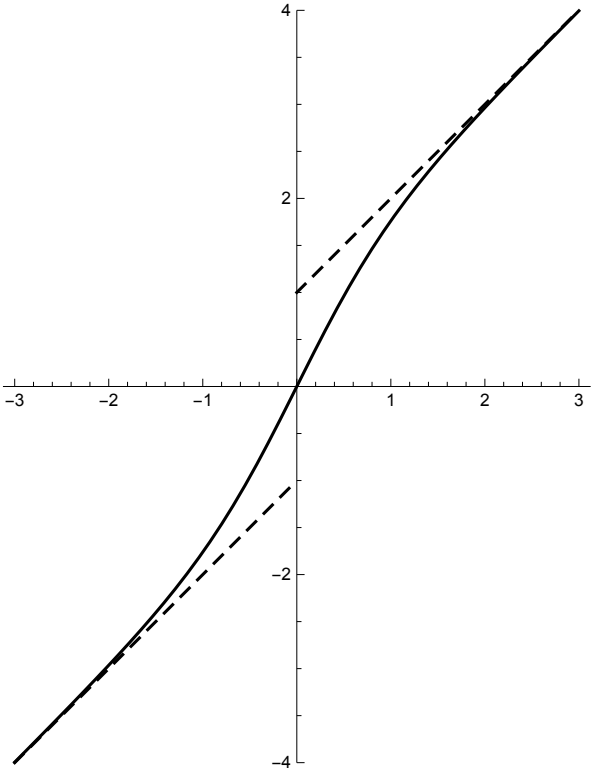
Aucune asymptote verticale.
Du côté $+\infty$, asymptote affine y = (1)x +(1)
Du côté -∞, asymptote affine y = (1)x +(− 1)

Tableau de variations

x	-∞		*0*		∞
	Symétrie centrale de centre O(0, 0)				
sgn(f'(x))		+	+	+	
sgn(f''(x))		+	*0*	−	
var(f(x))	-∞	↗	*0*	↗	∞
sgn(f(x))		−	*0*	+	

En remarquant que $f(0) = 0$,

Signe$(f(x))$:

négatif pour	$x < 0$
nul pour	$x = 0$
positif pour	$x > 0$

Graphique