Étude de fonctions exponentielles ou logarithmiques

Exercice el1-10

$$f(x) = \frac{x^3}{\mathrm{e}^x}$$

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions exponentielles ou logarithmiques
www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/exp-log/index.html

Corrigé

Ensemble de définition de f : x$\in \mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{e}^{-x} x^3$

Signe($f(x)$) :

négatif pour	$x < 0$
nul pour	$x = 0$
positif pour	$x > 0$

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}(-3+x)x^2$$

Signe($f'(x)$) :

négatif pour	$x > 3$
nul pour	$x = 0$ ou $x = 3$
positif pour	$x < 0$ ou $0 < x < 3$

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x} x \left(6 - 6x + x^2\right)$$

Signe($f''(x)$) :

négatif pour	$x < 0$ ou $3 - \sqrt{3} < x < 3 + \sqrt{3}$
nul pour	$x = 0$ ou $x = 3 - \sqrt{3}$ ou $x = 3 + \sqrt{3}$
positif pour	$0 < x < 3 - \sqrt{3}$ ou $x > 3 + \sqrt{3}$

Signe($f''(x)$) :

négatif pour	$x < 0$ ou $1.26795 < x < 4.73205$
nul pour	$x = 0$ ou $x = 1.26795$ ou $x = 4.73205$
positif pour	$0 < x < 1.26795$ ou $x > 4.73205$

Candidat(s) extremum(s) : $\left\{(0,0), \left(3, \frac{27}{\mathrm{e}^3}\right)\right\}$
Candidat(s) extremum(s) : $\{(0,0), \{3, 1.34425\}\}$, mais un seul maximum (relatif et absolu) en $x = 3$. En $x = 0$, il ne s'agit pas d'un extremum mais d'un point d'inflexion.
Candidat(s) point(s) d'inflexion :
$\left\{(0,0), \left(3-\sqrt{3}, -\left(-3+\sqrt{3}\right)^3 \mathrm{e}^{-3+\sqrt{3}}\right), \left(3+\sqrt{3}, \left(3+\sqrt{3}\right)^3 \mathrm{e}^{-3-\sqrt{3}}\right)\right\}$
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\{(0,0), (1.26795, 0.573644), (4.73205, 0.93335)\}$

Aucune asymptote verticale.
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Du côté $+\infty$, asymptote horizontale y= 0
$\lim_{x\to-\infty} = -\infty$. Du côté -$\infty$, pas d'asymptote affine.

Tableau de variations

x	-∞		*0*		*1.268*		*3*		*4.732*		∞
sgn(f(x))		−	*0*	+	+	+	+	+	+	+	
sgn(f'(x))		+	*0*	+	+	+	*0*	−	−	−	
sgn(f''(x))		−	*0*	+	*0*	−	−	−	*0*	+	
var(f(x))	-∞		*0*		*0.574*		*1.344*		*0.933*		*0*

Graphique