La racine carrée de 4 vaut-elle plus ou moins 2 ?

Quel est le signe de la racine carrée ?

Combien vaut $\sqrt{4}$?

- Première proposition : deux solutions existent: {-2, +2}, ce qu'on peut écrire $\sqrt{4} = \pm 2$
- Deuxième proposition: une et une seule réponse, à savoir $\sqrt{4} = 2$

***Commentaire*:** Les difficultés à répondre à ce genre de question proviennent généralement d'une confusion entre deux questions, certes voisines, mais qu'il est néanmoins nécessaire de soigneusement distinguer. Les élèves d'école primaire répondent généralement d'une manière correcte à la question. Les élèves du secondaire risquent de répondre d'une manière erronée, car ils ont étudié plusieurs sujets voisins qu'ils ont tendance à confondre.

***Moralité*:** Si on ne prend pas soin d'ordonner ses connaissances, plus on étudie, plus il y a matière à confusion et plus on régresse. L'étude des mathématiques n'est pas simplement cumulative, mais aussi structurée et relationnelle. La pensée floue et indifférenciée est ennemie de la culture.

L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = 4$ est {-2, 2}.

***Explication*:** il existe deux nombres réels x qui vérifient l'équation $x^2 = 4$.

C'est une autre question que la valeur de la racine carrée de 2. La racine carrée, étant une fonction, ne peut prendre qu'une seule valeur:

$$\boxed{\sqrt{4} = 2}$$

***Explication*:** la racine carrée de 4 est, par définition, le nombre non-négatif x qui vérifie l'équation $x^2 = 4$, si un tel nombre existe. En particulier, la valeur d'une racine carrée ne peut pas être négative.

***Moyen mnémotechnique*:** en effectuant un tel calcul au moyen d'une calculatrice, la machine ne donne qu'un seul résultat.

Résumé et exemple 1

L'équation $x^2 = 4$ possède deux solutions:

- une solution positive $\sqrt{4} = 2$
- une solution négative $-\sqrt{4} = -2$

ce que l'on peut écrire sous la forme condensée $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

***Attention*:** ne pas confondre avec $\sqrt{-4}$ qui n'existe pas, voir Exemple 3.

Exemple 2

L'équation $x^2 = 3$ possède deux solutions:

- une solution positive $\sqrt{3}$

- une solution négative $-\sqrt{3}$

Exemple 3

$\sqrt{-1}$ n'existe pas.

***Explication*:** Pour tout nombre réel x, $x^2 \geq 0$. Il n'existe donc aucun nombre réel x tel que $x^2 = -1$.

***Attention*:** ne pas confondre avec $-\sqrt{1} = -1$.

Exemple 4

$\sqrt{0} = 0$.

I. Définition de la fonction racine carrée

Jusqu'ici, seule l'expression « **la** racine carrée » a été prise en considération. Elle est interprétée comme désignant la **fonction racine carrée** à valeurs non négatives :

$$\sqrt{\ } : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$$
$$x \longmapsto y = \sqrt{x} \text{ tel que } y \geq 0 \text{ et } y^2 = x$$

qui est bijective.

Et si l'on pose la question au pluriel :
Quelles sont les racines carrées de 4 ?

Qu'en est-il des expressions « les racines carrées » et « une racine carrée » ? Rappelons que le langage d'arrière-plan des mathématiques est formalisé.

II. Définition de l'ensemble des racines carrées

L'ensemble des racines carrées du nombre réel x est l'ensemble des réels y tels que $y^2 = x$. On définit ainsi une application à valeurs dans l'ensemble des parties des nombres réels :

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$$
$$x \longmapsto \{y \in \mathbb{R} \mid y^2 = x\}$$

qui n'est ni injective, ni surjective.

Exemples de traductions

Quand on traduit dans une langue naturelle, disons en français, des ambiguïtés peuvent apparaître. Les énoncés suivants sont corrects :

- **les** racines carrées de 4 sont $\{-2, 2\}$, ce qu'on interprète comme « l'ensemble des racines carrées de 4 » est $\{-2, 2\}$;
- **une** racine carrée de 4 est 2, ce qu'on interprète comme « un élément de l'ensemble des racines carrées de 4 est 2 » ;

- **une** racine carrée de 4 est -2, ce qu'on interprète comme « un élément de l'ensemble des racines carrées de 4 est -2 ».

Il faut faire une distinction entre :

- l'expression verbale « racine carrée » lorsqu'elle est en rapport avec **l'ensemble** des racines carrées ;
- le symbole mathématique $\sqrt{\ }$ qui désigne une fonction dont les valeurs sont non négatives et qui est généralement appelée « **la** racine carrée ».

Par exemple,

- « une racine carrée de 4 est $\sqrt{4}$ » signifie que, dans l'ensemble des racines carrées, on considère la racine positive, à savoir $\sqrt{4} = 2$;
- « une racine carrée de 4 est $-\sqrt{4}$ » signifie que, dans l'ensemble des racines carrées, on considère la racine négative, à savoir $-\sqrt{4} = -2$.

Selon que l'expression « la racine carrée » est en relation avec l'ensemble des racines carrées ou concerne la fonction racine carrée, son sens est différent :

- « la racine carrée négative » signifie « dans l'ensemble des racines carrées, considérons la racine négative » ;
- « la racine carrée de 4 » signifie « l'image de 4 par la fonction racine carrée dont la valeur est non négative ».

Lien hypertexte vers la page mère :

Mathématiques dans la culture générale
https://www.deleze.name/marcel/culture/index.html