La genèse du calcul des probabilités
Corrigés des exercices

Lien hypertexte vers le document principal:

http://www.deleze.name/marcel/culture/probabilites/genese.pdf

■ Corrigé de l'exercice 2 a)

Si le joueur A gagnait la partie suivante, le score passerait à 7 à 5,
le joueur A recevrait 64 pistoles et l'autre 0 pistole.

Par contre, si le joueur B gagnait la partie suivante, le score passerait à 6 à 6,
le joueur A recevrait 32 pistoles et l'autre 32 pistoles également.

Pour le joueur A, 32 pistoles sont assurées tandis que (64 – 32) = 32 pistoles sont soumises au hasard du jeu.
Le joueur A doit recevoir

$$32 + \frac{1}{2} 32$$

48

■ Corrigé de l'exercice 2 b)

Le résultat obtenu est le même dans les deux cas considérés
* on joue en 3 parties et le score est de 2 à 1,
* on joue en 7 parties et le score est de 6 à 5.

Dans les deux cas, A est à 1 partie de gagner tous les enjeux et B est à 2 parties de gagner.

Ce qui compte, ce n'est pas le nombre de parties déjà jouées mais le nombre de parties qui restent à jouer.

■ Corrigé de l'exercice 3

Si A perd, il reçoit *s* pistoles. Si A gagne, il reçoit *r* pistoles.

Pour A, *s* pistoles lui sont assurées et
($r - s$) pistoles sont soumises au hasard du jeu.

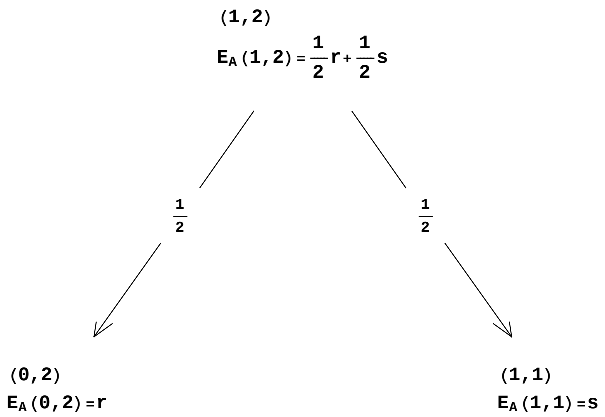
Le raisonnement de Pascal consiste à dire que la part de A est égale à

$$s + \frac{1}{2}(r - s) = s + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s$$

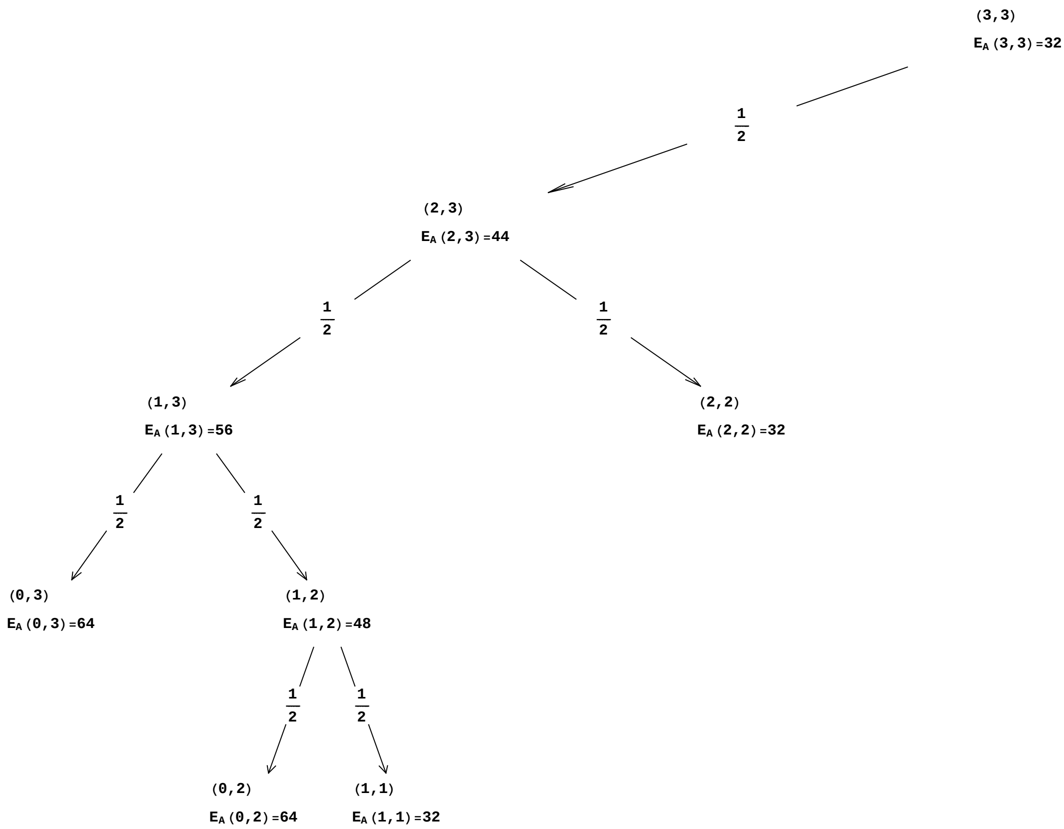
c'est-à-dire ***sa part est égale à la moyenne arithmétique des espérances mathématiques des deux états qui lui succèdent***.
En formule,

$$E_A(1, 2) = \frac{1}{2}E_A(0, 2) + \frac{1}{2}E_A(1, 1)$$

Il est intéressant de visualiser cette règle dans le graphe



Corrigé de l'exercice 4



Pour calculer l'espérance de gain de chaque état, on peut procéder comme suit.
<u>1-ère étape</u> : Déterminons l'espérance mathématique de chaque **état terminal**. Un état est appelé *terminal* lorsqu'il n'a pas de successeur. Dans le graphe, un état terminal est situé à l'extrémité d'un chemin.

$$E_A(0,2) = 64$$
$$E_A(1,1) = 32$$
$$E_A(0,3) = 64$$
$$E_A(2,2) = 32$$

<u>2-ème étape</u> : Déterminons l'espérance mathématique de tous les autres états où les deux joueurs sont à égalité

$$E_A(3,3) = 32$$

<u>3-ème étape</u> : Progressons de bas en haut dans le graphe. L'espérance mathématique d'un état non terminal est égal à la moyenne arithmétique de l'espérance des deux états qui lui succèdent:

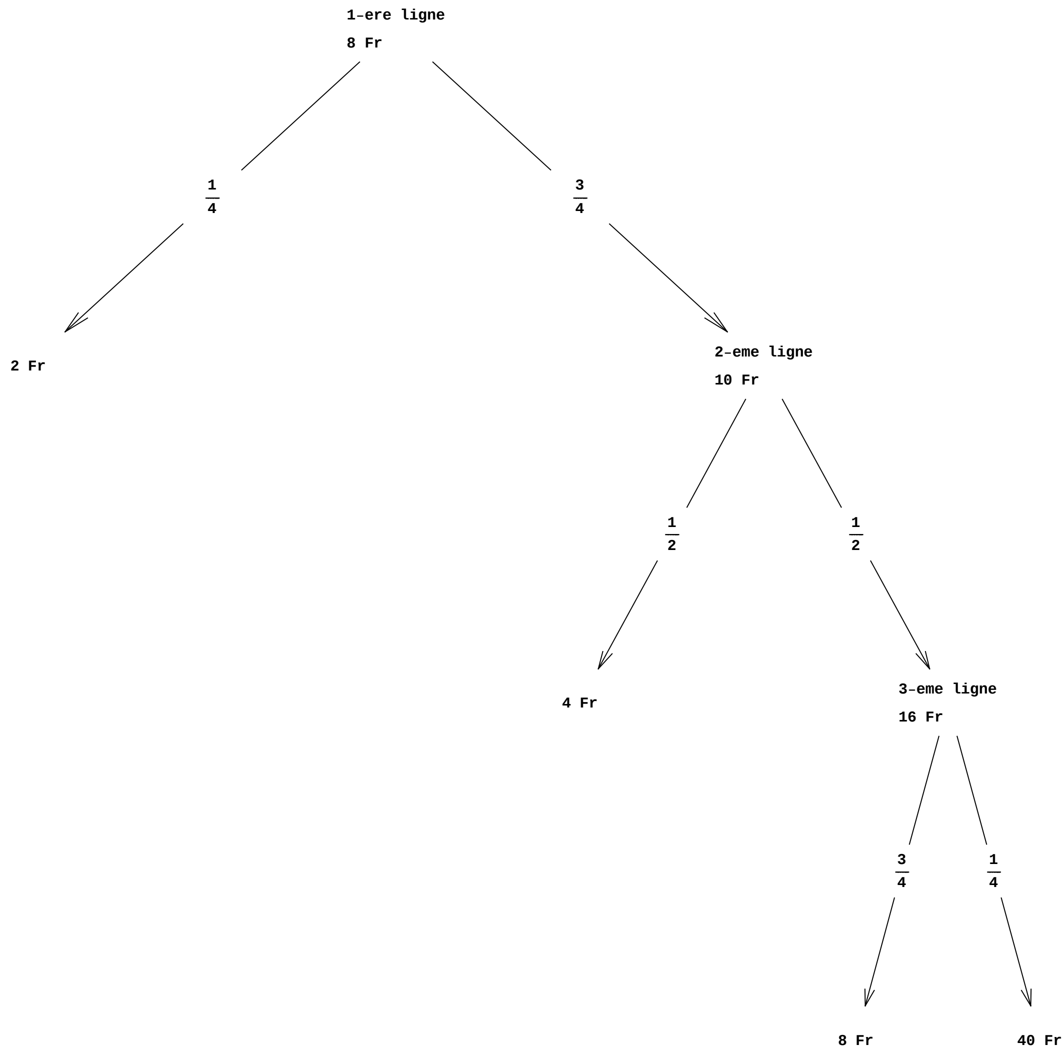
$$E_A(1,2) = \frac{1}{2}\,64 + \frac{1}{2}\,32 = 48$$
$$E_A(1,3) = \frac{1}{2}\,64 + \frac{1}{2}\,48 = 56$$
$$E_A(2,3) = \frac{1}{2}\,56 + \frac{1}{2}\,32 = 44$$

Pour notre problème, la formule générale est

$$E_A(m,n) = \frac{1}{2}\,E_A(m-1,n) + \frac{1}{2}\,E_A(m,n-1)$$

■ Corrigé de l'exercice 5

On commence par dessiner par un graphe dont les sommets représentent les états successifs de la carte de loterie et dont les arcs portent les probabilités de transition.



Les gains pour les états terminaux sont des données. Les gains pour les états non terminaux sont calculés avec la formule de Huygens

$$E\,(3-\text{ème ligne}) = \frac{3}{4}\,(8\,\text{Fr}) + \frac{1}{4}\,(40\,\text{Fr}) = 16\,\text{Fr}$$

$$E\,(2-\text{ème ligne}) = \frac{1}{2}\,(4\,\text{Fr}) + \frac{1}{2}\,(16\,\text{Fr}) = 10\,\text{Fr}$$

$$E\,(1-\text{ère ligne}) = \frac{1}{4}\,(2\,\text{Fr}) + \frac{3}{4}\,(10\,\text{Fr}) = 8\,\text{Fr}$$

La valeur d'une telle carte est donc de 8 Fr.