Jeu arithmétique M4

Règles du jeu

Demander à une autre personne d'effectuer les choix et calculs suivants:

1. Choisir un nombre dans $\{1, 2, ..., 9999\}$, par exemple $s = 3276$ (secret)
2. Multiplier le nombre précédent par 4999: $3276 \cdot 4999 = 16376724$ (secret)
3. Choisir un nombre naturel de huit chiffres, par exemple 26838742 (secret)
4. Additionner les deux derniers nombres $16376724 + 26838742 = 43215466$ (secret)
5. Du nombre du point 3, permuter les deux tranches de quatre chiffres 87422683 (secret)
6. De l'avant-dernier nombre, soustraire le dernier (le résultat peut être négatif) et publier le résultat

   $43215466 - 87422683 = -44207217 = p$

La suite du texte explique comment retrouver le nombre s du point 1, en fonction de p.

Fondements mathématiques

Pour déterminer le reste de la division d'un nombre par 9999, diviser le nombre en tranches de quatre chiffres (depuis la droite) puis faire la somme des tranches (depuis la droite). On peut itérer le procédé. Par exemple,

$$\begin{aligned} 45687342712 &\equiv 2712 + 8734 + 456 \pmod{9999} \\ &\equiv 11902 \pmod{9999} \\ &\equiv 1902 + 1 \pmod{9999} \\ &\equiv 1903 \pmod{9999} \end{aligned}$$

En effet, on a

$$10000 \equiv 9999 + 1 \equiv 1 \pmod{9999}$$

$$10000^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{9999} \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}$$

Par suite, pour un nombre décomposé en tranches de quatre chiffres, $t_i \in \{0, 1, ..., 9999\}$

$$t_0 + 10000\, t_1 + 10000^2\, t_2 + 10000^3\, t_3 + ...$$
$$\equiv t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + ... \pmod{9999} \qquad \blacksquare$$

Propriétés des nombres construits par les règles du jeu

Les nombres des points 3 et 5 sont égaux modulo 9999.

La différence des nombres des points 3 et 5 est multiple de 9999.

Les nombres des points 2 et 6 ont le même reste par division par 9999.

Méthode de congruences

$$p \equiv 4999\, s \pmod{9999}$$

$$-2\, p \equiv -9998\, s \equiv s \pmod{9999}$$

$$\boxed{s \equiv -2\, p \pmod{9999}}$$

Dans le cas où le résultat est nul, le nombre cherché est $s = 9999$.

Pour l'exemple,
$$\begin{aligned} s &\equiv -2\,(-44207217) \pmod{9999} \\ &\equiv 2\,(7217 + 4420) \pmod{9999} \\ &\equiv 2\,(11637) \pmod{9999} \\ &\equiv 2\,(1637 + 1) \pmod{9999} \\ &\equiv 3276 \pmod{9999} \end{aligned}$$